С.С. МАДЕЛХАНОВ, А.О. УРЫНБАЕВ

В помощь учителю и ученику

В помощь учителю и ученику

В помощь учителю и ученику

СБОРНИК ФОРМУЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

GeoGebra

Одобрено экспертной группой Ученого совета разработчиков кроссплатформенной динамической математической программы GeoGebra и Университетом имени Иоганна Кеплера г. Линц, Австрия

Нур-Султан

2021

УДК: 373(072)
ББК: 74.262.21
М 13

Рецензенты:

Т.У. Аубакиров – кандидат физико-математических наук, старший менеджер Центра образовательных программ АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», г. Нур-Султан.

Р.Н. Жумабаев – магистр естественных наук, учитель-эксперт математики, директор Назарбаев Интеллектуальной школы химико-биологического направления г. Павлодар.

Эксперт:

Жолт Лавича – профессор университета, доктор, Департамента STEM образования, Педагогической школы Линц, Университета имени Иоганна Кеплера города Линц, Австрия. Директор по исследованиям: Международный институт GeoGebra (IGI): http://geogebra.org

Маделханов С.С., Урынбаев А.О.

М 13 **Сборник формул по математике:** *Справочник // Для учителей и учащихся 7-12 классов / С.С. Маделханов, А.О. Урынбаев – Нур-Султан: Международный институт GeoGebra, 2021. – 177 с.*

Сборник включает в себя основные формулы элементарной и высшей математики, QR-коды, а также иллюстрации и ссылки на 2D-3D анимации некоторых иллюстраций построенных на кроссплатформенной динамической математической программе GeoGebra. Справочник разработан в соответствии с программой 12 летнего образования, адресован учителям математики и учащимся 7-12 классов общеобразовательных и интеллектуальных школ.

ISBN: 978-601-08-1300-7

УДК: 373(072)
ББК: 74.262.21

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел – III. ПЛАНИМЕТРИЯ

Раздел – V. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Раздел – VI. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Раздел – VII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Раздел – XIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Справочное пособие «Сборник формул по математике» разработан в соответствии с программой 12 летнего образования. Сборник включает в себя основные формулы элементарной и высшей математики по разделам: арифметика, алгебра, планиметрия, стереометрия, комплексные числа, тригонометрия, элементы линейной алгебры и т.д. «Сборник формул по математике» также содержит некоторые важные математические обозначения и таблицы множеств распределения вероятностей. Разделы дополнены QR-кодами, иллюстрациями и ссылками на 2D-3D анимации некоторых иллюстраций, построенных на кроссплатформенной динамической математической программе GeoGebra, которые можно рассмотреть под разным ракурсом. С помощью слайдера можно рассмотреть изменение функции при введении заданных значений, что упрощает работу с визуальным восприятием при применении кроссплатформенной математической динамической программы GeoGebra.

Справочник адресован учителям математики и учащимся средней и старшей школы общеобразовательных и интеллектуальных школ, оказывая помощь при подготовке к СОР и СОЧ, а также к важным экзаменам по математике: ЕНТ, IGCSE, AS&A-level, SAT и NUFYP.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1 МНОЖЕСТВО ЧИСЕЛ

1	$N \to$	$\{\lvert a\rvert \mid a \in Z\} = N$ (множество натуральных чисел) $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 13, \dots\}$
2	$Z \to$	$\{a, -a \mid a \in N\} \cup \{0\} = Z$ (множество целых чисел) $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
3	$I \to$	(множество иррациональных чисел) $\{\dots, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{4} + 1, \sqrt[11]{5} - \sqrt{2}, \dots\}$
4	$Q \to$	$\left\{\frac{p}{q} \middle\vert p \in Z \wedge q \in Z \cap q \neq 0\right\} = Q$ (множество рациональных чисел) $\left\{\dots, -0.15, 2 + \frac{1}{3}, 4.23, 22.1(5), \frac{2}{13}, \dots\right\}$
5	$R \to$	$N, Z, I, Q \ \in R$ (множество вещественных чисел) $\left\{\dots - 3, \sqrt{5} + 2, -\sqrt{3} + 0.1, \frac{\sqrt[3]{4}}{7}, \frac{\sqrt[11]{11} + \sqrt{2}}{2.11}, 4, \dots\right\}$
6	$C \to$	$\{a + bi \mid a \in R \wedge b \in R\}, i \in \mathrm{C}$ (множество комплексных чисел) $\left\{\dots, i\sqrt{2}, \sqrt{-3}, i \pm \sqrt[3]{9}, \sqrt{\frac{\sqrt[4]{4} + \sqrt{-2}}{5}}, \dots\right\}$
7	$H \to$	$\{a + bi + cj + dk \mid a \in R \wedge b \in R \wedge c \in R \wedge d \in R\}, i \in H$ (кватернионы, гиперкомплексные числа)

2 ЗНАЧЕНИЕ СИМВОЛОВ

1	$\Rightarrow$	«импликация» (следовательно) $A \Rightarrow B$
	$\to$	«влечет» или «если, …, то»
	$\supset$	«везде»
2	$\Leftrightarrow$	«равносильность» $A \Leftrightarrow B$
3	$\wedge$	«и» (конъюнкция) $A \wedge B$
4	$\vee$	«или» (дизъюнкция) $A \vee B$
5	$\neg$	«не» (отрицание) $A \neg B$
6	$\forall$	«для любых» $\forall\, x, P(x)$
7	$\exists$	«существует» $\exists\, x, P(x)$
8	$:=$	«определение» (x по определению равен y) $x := y$

9	$:\Leftrightarrow$	«равносильно по определению» (P по определению равносильно Q)
10	$\stackrel{\text{def}}{=}$	«везде» $P :\Leftrightarrow Q$
11	$\{ , \}$	«множество элементов» $\{a, b, c, \dots\}$
12	$\{\mid\}$	«множество всех … таких, что верно …» $\{x \mid P(x)\}$ множество всех x таких, что верно $P(x)$.
13	$\emptyset, \{\ \}$	Пустое множество
14	$\in / \notin$	Принадлежит / не принадлежит
15	$\subseteq$	«подмножество» $A \subseteq B, A \subset B$
	$\subset$	«включает в» (каждый элемент из A включает B)
16	$\supseteq$	«надмножество» $A \supseteq B$
	$\supset$	«включает в себя» $A \supset B$
17	$\subsetneq$	«собственное подмножество» $A \subsetneq B$
18	$\supsetneq$	«собственное надмножество» $A \supsetneq B$
19	$\cup$	«объединение», $A \cup B$ элементы принадлежат
20	$\cap$	«пересечение», $A \cap B$ одинаковые элементы принадлежат
21	$\setminus$	$A \setminus B$ (разность множеств)
22	$\longrightarrow$	«из … в …» $f: X \longrightarrow Y$
23	$\longmapsto$	«отображается в» $f: x \longmapsto f(x)$
24	Σ	Сумма (набор чисел), сумма ряда
25	Π	Произведение чисел
26	∞	«бесконечность» $\pm\infty$
27	$\mid\ \mid$	«модуль», абсолютная величина $\lvert a \rvert$
28	$\approx$	«приближенно равно»
29	!	«факториал» ($5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$) $n!$
30	$\int dx$	«интеграл» $\int_a^b f(x)\,dx$
31	$\frac{df}{dx}$	«производная»
	$f'(x)$	«производная f от x по переменной x»
32	$\frac{\partial f}{\partial y}$	«частная производная»
33	$\angle$	«угол» $\angle\varphi = x^\circ$
34	$\perp$	«перпендикуляр» $A \perp B$
35	$\sim$	«подобно» $A \sim B$

36	Δ	«треугольник» $\Delta\, ABC$
37	$\sqrt[n]{\ }$	«корень –ой степени»
38	$>, <$	«больше» и «меньше»
	$\geq, \leq$	«больше либо равно» и «меньше либо равно»

3 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Греческий алфавит			
1	Α	α	**Альфа**
2	Β	β	**Бета**
3	Γ	γ	**Гамма**
4	Δ	δ	**Дельта**
5	Ε	ε	**Эпсилон**
6	Ζ	ζ	**Дзета**
7	Η	η	**Эта**
8	Θ	θ	**Тета**
9	Ι	ι	**Йота**
10	Κ	κ	**Каппа**
11	Λ	λ	**Лямбда**
12	Μ	μ	**Мю**
13	Ν	ν	**Ню**
14	Ξ	ξ	**Кси**
15	Ο	o	**Омикрон**
16	Π	π	**Пи**
17	Ρ	ρ	**Ро**
18	Σ	σ	**Сигма**
19	Τ	τ	**Тау**
20	Υ	υ	**Ипсилон**
21	Φ	φ	**Фи**
22	Χ	χ	**Хи**
23	Ψ	ψ	**Пси**
24	Ω	ω	**Омега**

Римские числа	
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XL	40
L	50
XC	90
C	100
D	500
M	1000

Азбука Морзе			
А	· —	**Р**	· — ·
Б	— · · ·	**С**	· · ·
В	· — —	**Т**	—
Г	— — ·	**У**	· · —
Д	— · ·	**Ф**	· · — ·
Е	·	**Х**	· · · ·
Ж	· · · —	**Ц**	— · — ·
З	— — · ·	**Ч**	— — — ·
И	· ·	**Ш**	— — — —
Й	· — — —	**Щ**	— — · —
К	— · —	**Ъ**	· — — · — ·
Л	· — · ·	**Ы**	— · — —
М	— —	**Ь**	— · · —
Н	— ·	**Э**	· · · — · · ·
О	— — —	**Ю**	· · — —
П	· — — ·	**Я**	· — · —

Раздел – I. АРИФМЕТИКА

1.1 КВАДРАТ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

д\е	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

1.2 ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. НОК и НОД двух чисел:

$$\text{НОК}\,(a,b) \times \text{НОД}\,(a,b) = a \times b$$

НОД ⟶ это наибольшее число, на которое оба числа a и b делятся без остатка.

НОК ⟶ это наименьшее натуральное число, которое само делится нацело на каждое из этих чисел.

2. Извлечение квадратного корня (Метод Герона):

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

3. Средние величины:

1) Средняя арифметическая:

$$\text{ср. ар.} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

2) Средняя гармоническая:

$$\text{ср. гарм.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

3) Средняя геометрическая:

$$\text{ср. геом.} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

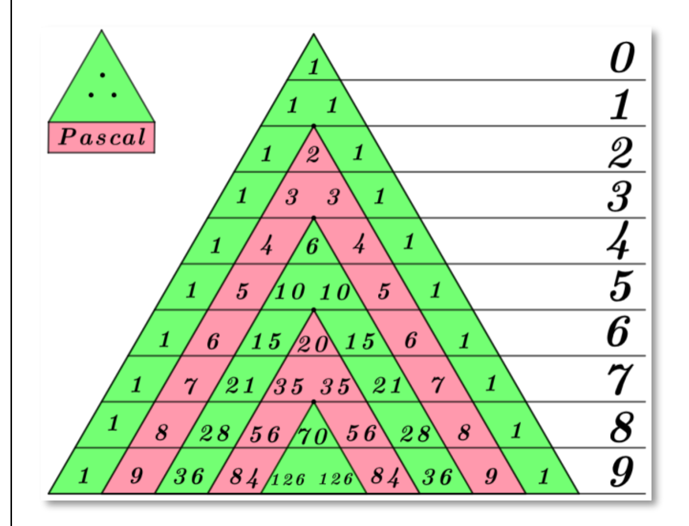
	Проценты:
4	**1) Нахождение процента от числа a:** $$a = 100\%, x = p\% \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ap}{100}$$ **2) Нахождение числа по его проценту:** $$a = p\%, y = 100\% \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a \cdot 100}{p}$$ **3) Нахождение процентного отношения двух чисел a и b:** $$\frac{a}{b}100\%$$ **4) Формула простого процента:** $$A_n = A_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$ где: A_0 − внесенная сумма, $p\%$ − ежемесячный процент, n − количество месяцев. **5) Формула сложного процента:** $$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$ где: A_0 − внесенная сумма, $p\%$ − годовой процент, n − количество лет.

1.3 ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Меры длины:	**Меры площади:**
$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$ $1 \text{ дм} = 10 \text{ см}$ $1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см}$ $1 \text{ км} = 1{,}000 \text{ м}$	$1 \text{ см}^2 = 100 \text{ мм}^2$ $1 \text{ дм}^2 = 100 \text{ см}^2$ $1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2 = 10{,}000 \text{ см}^2$ $1 \text{ а} = 100 \text{ м}^2$ $1 \text{ га} = 100 \text{ а} = 10{,}000 \text{ м}^2$ $1 \text{ км}^2 = 100 \text{ га} = 1{,}000{,}000 \text{ м}^2$
Меры массы:	**Меры времени:**
$1 \text{ кг} = 1{,}000 \text{ г}$ $1 \text{ ц} = 100 \text{ кг}$ $1 \text{ т} = 10 \text{ ц} = 1{,}000 \text{ кг}$	$1 \text{ мин} = 60 \text{ сек}$ $1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}$ $1 \text{ сут} = 24 \text{ ч}$ $1 \text{ неделя} = 7 \text{ сут} = 168 \text{ ч}$ $1 \text{ месяц} = 30\ (31) \text{ сут}$ $1 \text{ год} = 12 \text{ месяцев} = 365\ (366) \text{ сут}$ $1 \text{ век} = 100 \text{ лет}$

Раздел – II. АЛГЕБРА

2.1 ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1	**Стандартный вид числа:**	
	$c = a \cdot 10^n, \;\; 1 \le a < 10, n \in Z$	
2	**Абсолютная погрешность:**	
	$\Delta = \lvert x - x_1 \rvert,$ где: x − точное значение, x_1 − приближенное значение.	
3	**Относительная погрешность:**	
	$\varepsilon = \frac{\Delta}{\lvert x_1 \rvert} = \frac{\lvert x - x_1 \rvert}{\lvert x_1 \rvert}$ или $\varepsilon = \frac{\Delta}{\lvert x_1 \rvert} \cdot 100\% = \frac{\lvert x - x_1 \rvert}{\lvert x_1 \rvert} \cdot 100\%$	
4	**Формулы сокращенного умножения (ФСУ):**	
	1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ 3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ 5) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 6) $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$ 7) $a^4 + b^4 = \left(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2\right)$ 8) $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})$	
5	**Бином Ньютона:**	**Пирамида Паскаля:**
	$(a + b)^n =$ $= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 +$ $+ C_n^3 a^{n-3} b^3 + \cdots + C_n^m a^{n-m} b^m + \cdots +$ $+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ где: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}, (n > m; \;\; n, m \in N)$	
6	**Формула члена разложения вида $(a + b)^n$:**	
	$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$	

7	**Действие со степенями:**
	1) $a^m a^n = a^{m+n}$ 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$ 3) $(ab)^m = a^m b^m$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ 5) $(a^m)^n = a^{mn}$ 6) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ 7) $a^0 = 1\ (a \neq 0)$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
8	**Действие с корнями:**
	1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$ 3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ 5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$ 6) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^t = \sqrt[n]{a^{mt}}$ 7) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$ 8) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ 9) $\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}$ 10) $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$ 11) $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$
9	**Формула сложного радикала:**
	$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

2.2 ПРОГРЕССИЯ

1	**Арифметическая прогрессия:**
	1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ 2) $d = a_{n+1} - a_n$ 3) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$
2	**Геометрическая прогрессия:**
	1) $q = b_{n+1} : b_n$ 2) $a_n = b_1 q^{n-1}$ 3) $S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad (q \neq 1)$ 4) $S_n = nb_1, \quad (q = 1)$
3	**Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:**
	$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$

2.3 ЛОГАРИФМЫ

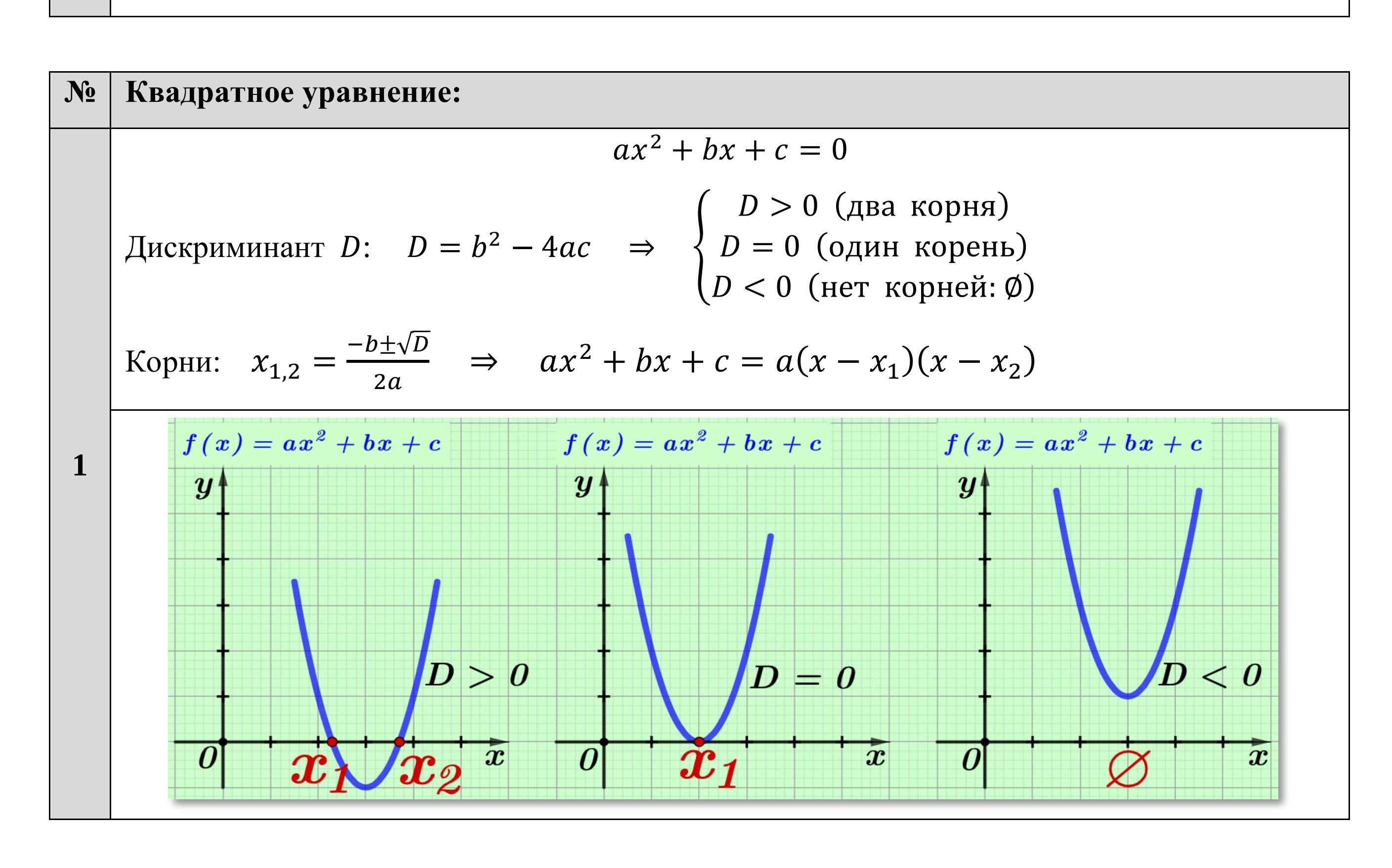
1	1) $\log_a b = x \iff a^x = b \ (a > 0, b > 0, a \neq 1)$
2	2) $a^{\log_a b} = b$ 3) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ 4) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ 5) $\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ 6) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 7) $\log_a m^n = n \log_a m$ 8) $\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_a m$ 9) $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$ 10) $\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1 \\ +\infty & \text{при } a < 1 \end{cases}$ 11) $\log_{10} N = \lg N$ 12) $\log_e N = \ln N, \quad e \approx 2.7182818285 \ldots$

2.4 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

№	Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля:
1	**Уравнение вида:** $\lvert f(x)\rvert = a \Rightarrow \left\lvert \begin{array}{l} 1)\text{ если } a \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right. \\ 2)\text{ если } a < 0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$
2	**Уравнение вида:** $\lvert f(x)\rvert = -f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$
3	**Уравнение вида:** $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ или $f^2(x) = g^2(x)$
4	**Уравнение вида:** $\lvert f(x)\rvert = g(x) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$
5	**Уравнение вида:** $f(\lvert x\rvert) = g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(-x) = g(x) \\ x < 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

№	Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля:
1	**Неравенство вида:** $\lvert f(x)\rvert < a \Rightarrow \left\lvert \begin{array}{l} 1)\text{ если } a \leq 0 \Rightarrow \varnothing \\ 2)\text{ если } a > 0 \Rightarrow -a < f(x) < a \end{array}\right.$
2	**Неравенство вида:** $\lvert f(x)\rvert \geq a \Rightarrow \left\lvert \begin{array}{l} 1)\text{ если } a \leq 0 \Rightarrow x \in D(f) \\ 2)\text{ если } a > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a \\ f(x) \geq a \end{array}\right. \end{array}\right.$
3	**Неравенство вида:** $\lvert f(x)\rvert < g(x) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right.$
4	**Неравенство вида:** $\lvert f(x)\rvert > g(x) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
5	**Неравенство вида:** $\lvert f(x)\rvert < \lvert g(x)\rvert \Rightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) < 0$

6	**Неравенство вида:** $$f(\lvert x\rvert) < g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) < g(x) \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$
7	**Неравенства вида:** $$\lvert f(x)\rvert \cdot g(x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f \neq 0 \end{cases}$$ и $$\lvert f(x)\rvert \cdot g(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f \neq 0 \end{cases}$$
8	**Неравенства вида:** $$\lvert f(x)\rvert \cdot g(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f = 0 \end{cases}$$ и $$\lvert f(x)\rvert \cdot g(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f = 0 \end{cases}$$
9	**Неравенства вида:** 1) $\lvert f(x)\rvert > f(x) \Rightarrow f(x) < 0;$ 2) $\lvert f(x)\rvert \geq f(x) \Rightarrow x \in D(f);$ 3) $\lvert f(x)\rvert < f(x) \Rightarrow x \in \emptyset;$ 4) $\lvert f(x)\rvert \leq f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0.$



№	Квадратное уравнение:
1	$$ax^2 + bx + c = 0$$ Дискриминант D: $D = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ (два корня)} \\ D = 0 \text{ (один корень)} \\ D < 0 \text{ (нет корней: } \emptyset) \end{cases}$ Корни: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
	(graphs)

2	$$ax^2+bx+c=0$$ Дискриминант D_1: $D_1=k^2-ac$ (при условии, что $k=2b$) Корни: $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$ $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
3	$$ax^2+bx+c=0$$ Дискриминант $D<0$: $D=b^2-4ac$ (x_1,x_2 – коплексные корни) Корни: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-D}}{2a}=\frac{-b\pm i\sqrt{D}}{2a}$ $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

№	**Теорема Виета для алгебраических уравнений:**
1	**Теорема Виета для квадратного уравнения $(x-x_1)(x-x_2)=0$:** $$ax^2+bx+c=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$
2	**Теорема Виета для кубического уравнения $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$:** $$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$
3	**Теорема Виета для n-го уравнения $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$:** $$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$$ $$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3\dots x_{n-1}x_n=(-1)^n\cdot\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

№	**Кубическое уравнение (Формула Кардано):**
1	**Кубическое уравнение вида:** $$ax^3+bx^2+cx+d=\left\lvert \begin{matrix}\text{Замена:} \\ x=y-\frac{b}{3a}\end{matrix} \right\rvert=y^3+\underbrace{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right)}_{p}y+\underbrace{\left(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)}_{q}=0$$ Отсюда следует: $$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \Rightarrow \quad y^3+py+q=0,$$

	где: $$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{2}\right)^3}}$$

№	**Иррациональные уравнения:**
1	**Уравнение вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)}=a \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}1)\text{ если } a\ge 0 \Rightarrow f(x)=a^2\\ 2)\text{ если } a<0 \Rightarrow \emptyset\end{array}\right.$$
2	**Уравнение вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} g(x)\ge 0\\ f(x)=g^{2n}(x)\end{cases}$$
3	**Уравнение вида:** $$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x) \quad\Rightarrow\quad f(x)=\big(g(x)\big)^{2n+1}$$
4	**Уравнение вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f(x)=g(x)\\ f(x)\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)=g(x)\\ g(x)\ge 0\end{cases}$$
5	**Уравнение вида:** $$\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)} \quad\Rightarrow\quad f(x)=g(x)$$
6	**Уравнение вида:** $$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}$$
7	**Уравнение вида:** $$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$$
8	**Уравнение вида:** $$f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ g(x)=0\end{array}\right.\\ g(x)\ge 0\end{cases}$$
9	**Уравнение вида:** $$\sqrt{f(x)\cdot g(x)}=a \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}1)\text{ если } a\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)\cdot g(x)=a^2\end{cases}\\ 2)\text{ если } a<0 \Rightarrow \emptyset\end{array}\right.$$

№	**Иррациональные неравенства:**
1	**Неравенство вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, n \in N \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$
2	**Неравенство вида:** $$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, n \in N \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x)$$
3	**Неравенство вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), n \in N \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$$
4	**Неравенство вида:** $$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), n \in N \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^{2n}(x) \end{cases} \end{array} \right.$$
5	**Неравенство вида:** $$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), n \in N \quad \Rightarrow \quad f(x) < g^{2n+1}(x)$$
6	**Неравенства вида:** $$1)\ \sqrt{f(x)} < a - \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < \left(a - \sqrt{g(x)}\right)^2 \\ f(x) \geq 0 \\ a - \sqrt{g(x)} \geq 0 \end{cases};$$ $$2)\ \sqrt{f(x)} > a - \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - \sqrt{g(x)} < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ f(x) > \left(a - \sqrt{g(x)}\right)^2 \end{array} \right.;$$ $$3)\ \sqrt{f(x)} < a + \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < \left(a + \sqrt{g(x)}\right)^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases};$$ $$4)\ \sqrt{f(x)} > a + \sqrt{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) > \left(a + \sqrt{g(x)}\right)^2.$$

№	**Некоторые важные неравенства:**
1	$$\lvert a+b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$$
2	$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad (a > 0)$$
3	$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad (a > 0, b > 0)$$
4	$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

№	Показательные и логарифмические уравнения
1	**Уравнение вида:** $a^{f(x)} = b, (a > 0, a \neq 1, b > 0) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \log_a b$
2	**Уравнение вида:** $\log_a f(x) = b, (f(x) > 0, a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = a^b$
3	**Уравнение вида:** $a^{f(x)} = a^{g(x)}, (a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)$
4	**Уравнение вида:** $\log_a f(x) = \log_a g(x), (a > 0, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
5	**Уравнение вида:** $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$

№	Показательные и логарифмические неравенства
1	**Неравенство вида:** $a^{f(x)} < a^{g(x)}, (a > 1, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x)$
2	**Неравенство вида:** $a^{f(x)} < a^{g(x)}, (0 < a < 1, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad f(x) > g(x)$
3	**Неравенство вида:** $\log_a f(x) < \log_a g(x), (a > 1, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
4	**Неравенство вида:** $\log_a f(x) < \log_a g(x), (0 < a < 1, a \neq 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

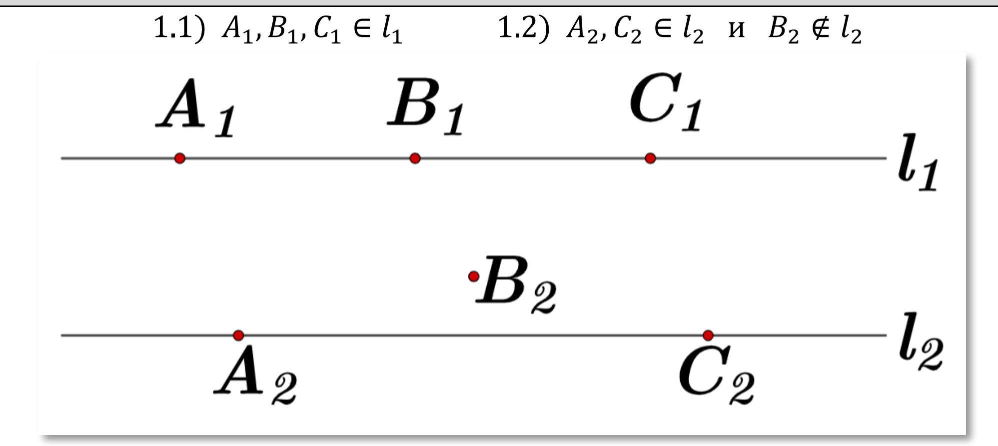
Раздел – III. ПЛАНИМЕТРИЯ

3.1 АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Аксиома–1.1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой и точки, не принадлежащие ей.

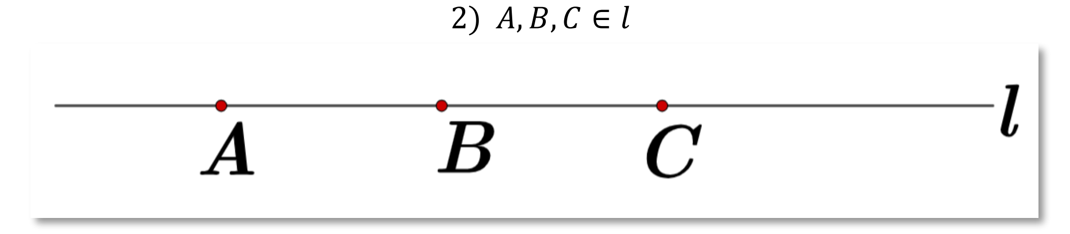
Аксиома–1.2. Через любые две точки можно провести прямую и только одну.

1.1) $A_1, B_1, C_1 \in l_1$ 1.2) $A_2, C_2 \in l_2$ и $B_2 \notin l_2$



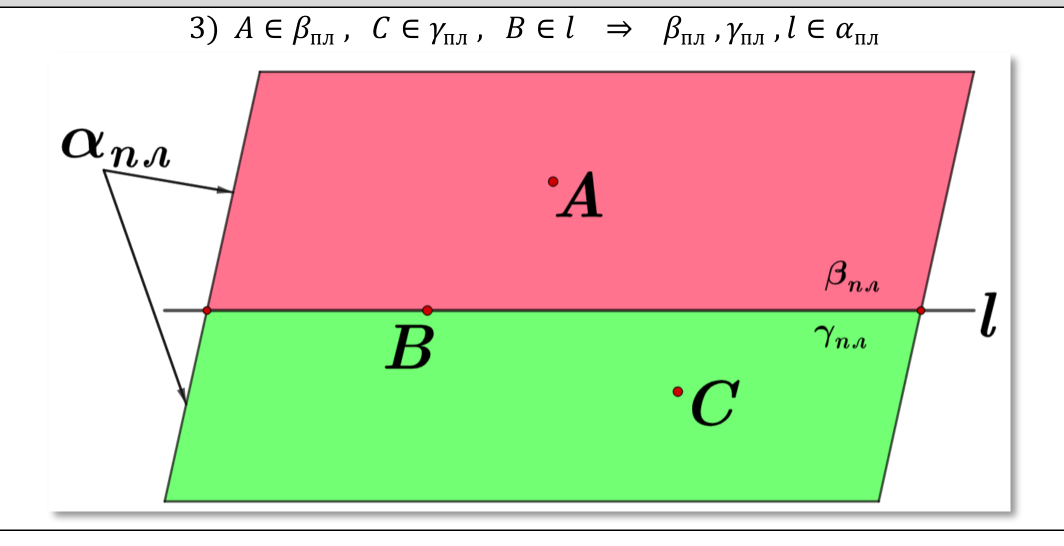
Аксиома–2. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

2) $A, B, C \in l$



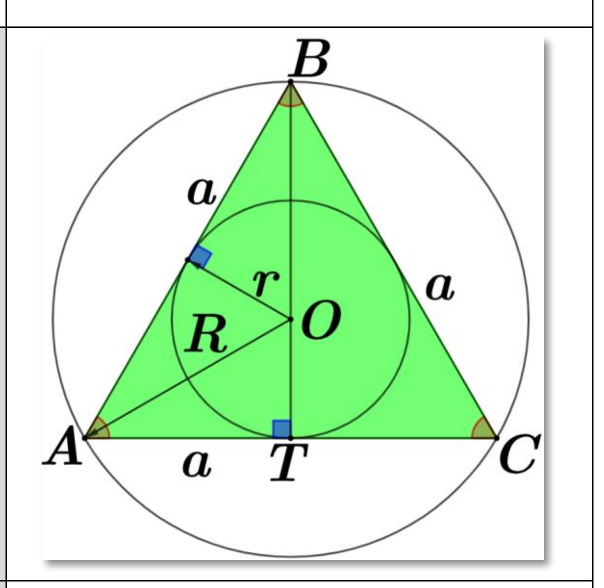
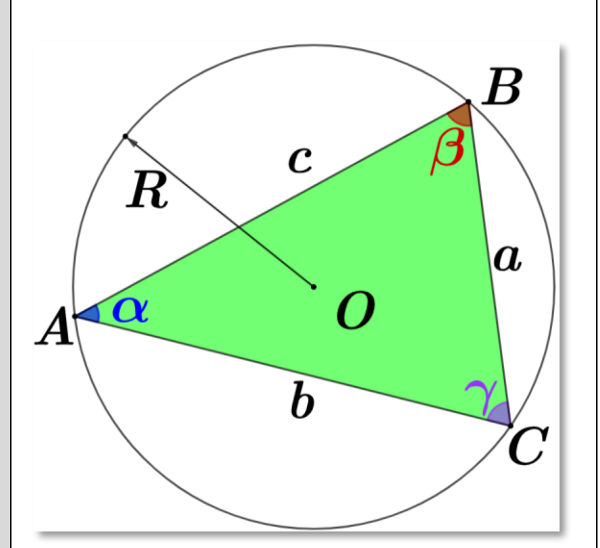
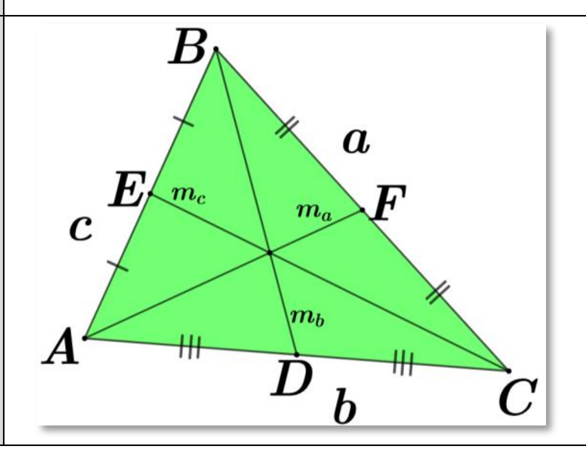
Аксиома–3. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

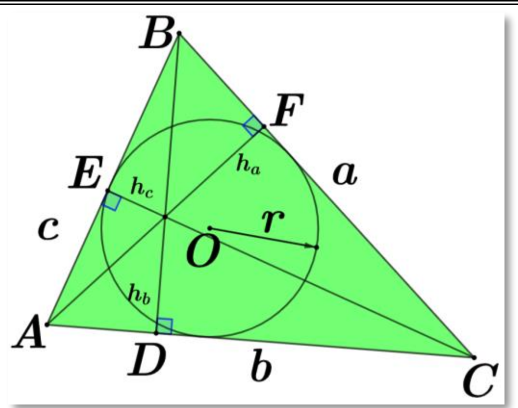
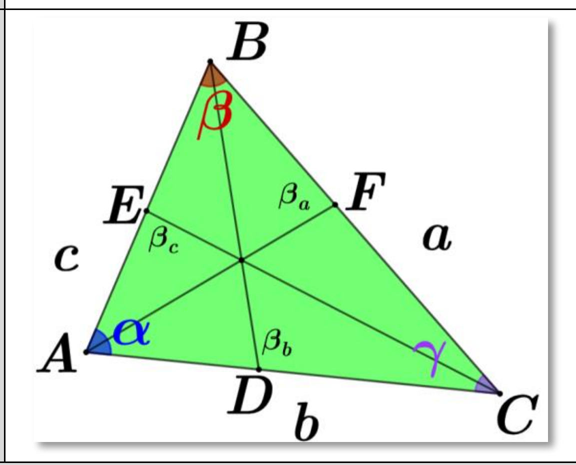
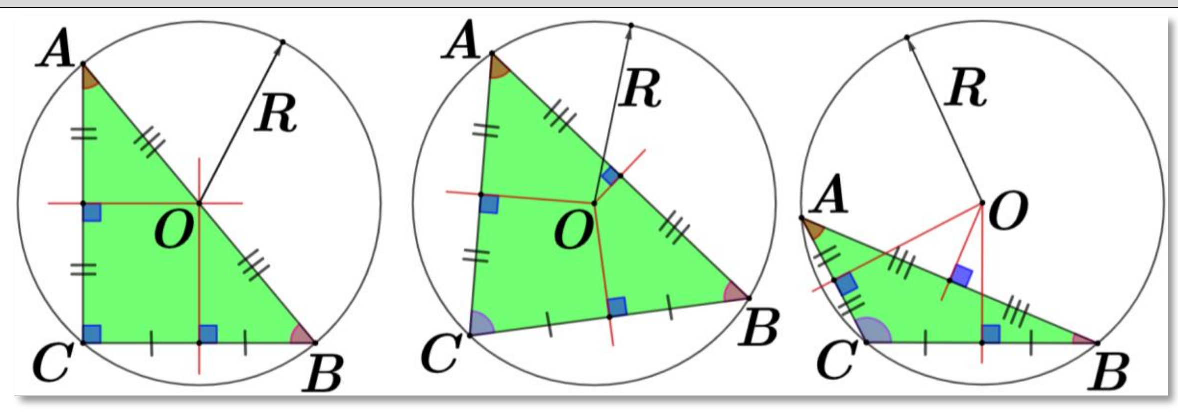
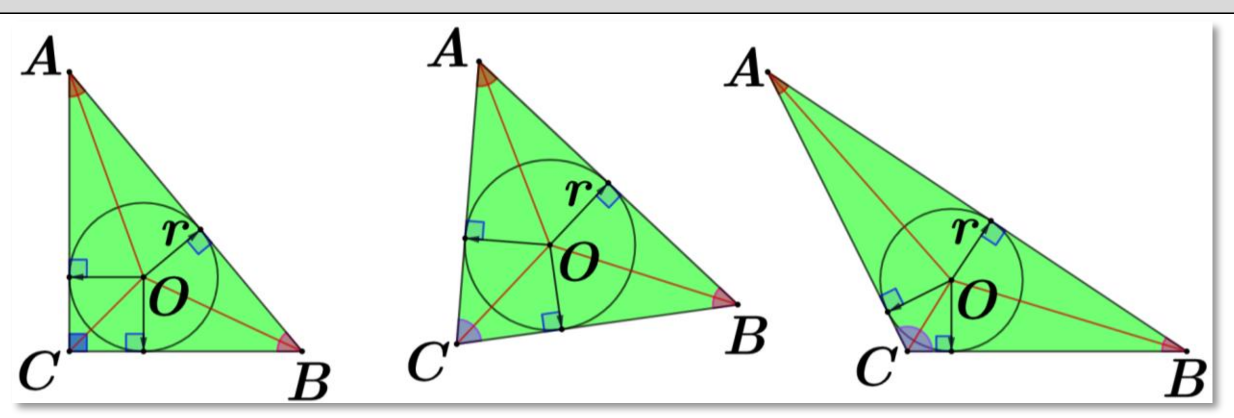
3) $A \in \beta_{\text{пл}}$, $C \in \gamma_{\text{пл}}$, $B \in l$ $\Rightarrow$ $\beta_{\text{пл}}, \gamma_{\text{пл}}, l \in \alpha_{\text{пл}}$



3.2 ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ПЛОЩАДЬ

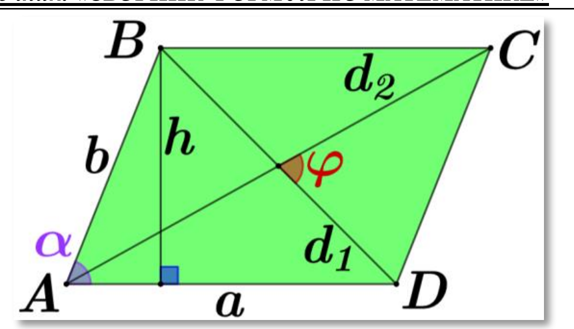
№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Площадь треугольника:** $$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$ **Формула Герона:** $$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$ где p – полупериметр: $$p = \frac{a+b+c}{2}$$	
	Ссылка на 2D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ncy9hgw4	
2	**Площадь прямоугольного треугольника:** $$S_\Delta = \frac{1}{2}ab$$ **Теорема Пифагора:** $$a^2 + b^2 = c^2$$ **Тригонометрические функции острого угла:** $$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$ $$\tan\alpha = \frac{a}{b},\quad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$	
3	**Площадь треугольника:** $$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$$ **Площадь треугольника при $\varphi = 90°$:** $$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab$$	
4	**Площадь треугольника:** $$S_\Delta = pr = \frac{abc}{4R}\,,$$ где p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, O_1 – центр вписанной окружности, O_2 – центр описанной окружности.	

<table>
<tr><td></td><td>Ссылка на 2D иллюстрацию:
https://www.geogebra.org/classic/zbbfusxd</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Площадь равностороннего треугольника:
$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$
где $h -$ высота:
$$h = R + r, \quad R = \frac{2}{3}h, \quad r = \frac{1}{3}h$$
Площадь треугольника при $\varphi = 60°$:
$$S_\Delta = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Площадь треугольника:
$$S_\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$
Теорема синусов:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
Теорема косинусов:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$
где:
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Медиана:
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

8	**Высота:** $$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{h_b}=\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$ где r – радиус вписанной окружности	
9	**Биссектриса:** $$\beta_a=\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$ $$\beta_b=\frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$ $$\beta_c=\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$	
10	**Окружность, описанная около треугольника.** Центр окружности (т. O) – точка пересечения серединных перпендикуляров.	
		
11	**Окружность, вписанная в треугольник.** Центр окружности (т. O) – точка пересечения биссектрис.	
		

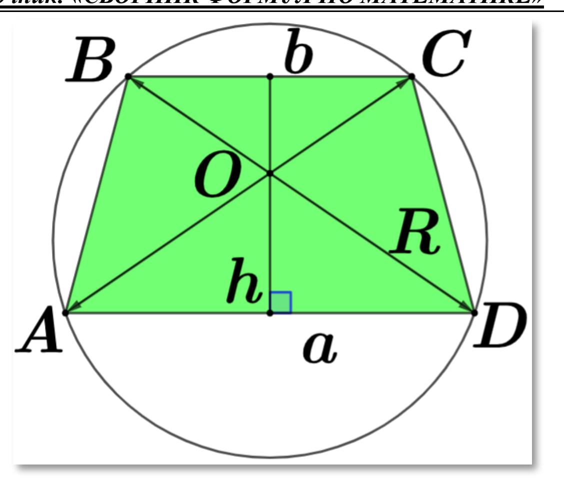
3.3 ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК И ЕГО ПЛОЩАДЬ

№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Площадь квадрата:** $S = a^2$ **Диагональ квадрата:** $d = 2R = a\sqrt{2}$ **Радиус вписанной окружности:** $r = \frac{a}{2}$ **Радиус описанной окружности:** $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	
2	**Площадь прямоугольника:** $S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$ **Диагональ прямоугольника:** $d = 2R = \sqrt{a^2 + b^2}$ **Радиус описанной окружности:** $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$	
3	**Площадь ромба:** $S = ha = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2$, где: d_1 − наименьшая диагональ, d_2 − наибольшая диагональ. **Радиус окружности, вписанный в ромб:** $r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}a\sin A$	

4	**Площадь параллелограмма:** $$S = ah = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$ **Свойство параллелограмма:** $$d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2a^2 + 2b^2$$	

3.4 ТРАПЕЦИЯ И ЕГО ПЛОЩАДЬ

№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Площадь трапеции:** $$S = mh = \frac{a+b}{2}h = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi,$$ где m – средняя линия трапеции. **Свойство трапеции:** $$d_1 + d_2 > a + b$$	
2	**Равновеликие части трапеции:** $$S_1 = S_2$$ $\boldsymbol{l}$ – **отрезок, делящий трапецию на две равновеликие части:** $$l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$	
3	**Свойство трапеции, описанной около окружности:** $$BC + AD = AB + CD$$ **Высота:** $$h = 2r$$ **Свойство равнобедренной трапеции, описанной около окружности:** $$AB = \frac{1}{2}(BC + AD)$$ Ссылка на 2D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/nc3dte5z	

4	**Свойство равнобедренной трапеции, вписанной в окружность:** $AO = BO = CO = DO = R$	

3.5 ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК И ЕГО ПЛОЩАДЬ

№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Площадь произвольного четырехугольника:** $S_{\text{ПЧ}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ **Площадь произвольного четырехугольника:** $S_{\text{ПЧ}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p − полупериметр: $p = \frac{a+b+c+d}{2}$	
2	**Площадь ромбоида:** $S_{\text{Ромбоида}} = \frac{1}{2} d_1 d_2$	

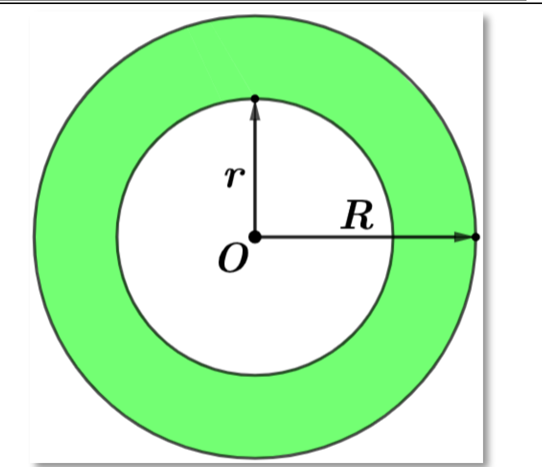
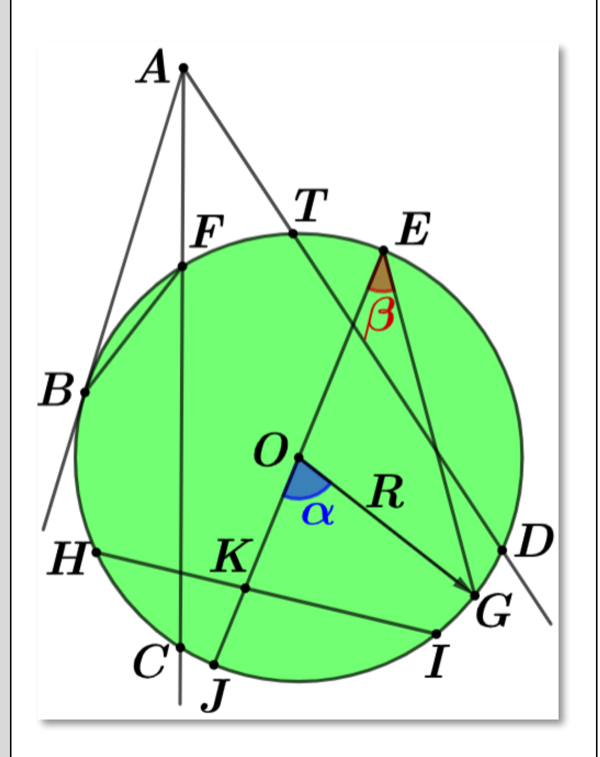
3	**Свойство произвольного четырехугольника:** $$a^2+b^2+c^2+d^2={d_1}^2+{d_2}^2+4m^2,$$ $$(\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°)$$ где $m-$ отрезок соединяющий середины диагоналей	
4	**Теорема Птолемея:** $$d_1d_2=ac+bd,$$ $$(\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°)$$	

3.6 ПРАВИЛЬНЫЙ *N*–УГОЛЬНИК

№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Центральный угол:** $$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$ **Внешний угол:** $$\beta = \frac{2\pi}{n}$$ **Внутренний угол:** $$\gamma = \pi - \beta = \pi - \frac{2\pi}{n}$$	
2	**Сторона описанного** n**– угольника:** $$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$ **Площадь описанного** n**– угольника:** $$S_n = \frac{1}{2}na_n r = nr^2\tan\frac{\pi}{n}$$	
3	**Сторона вписанного** n**– угольника**: $$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2r\tan\frac{\pi}{n}$$ **Площадь вписанного** n**– угольника**: $$S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{4}n{a_n}^2\cot\frac{\pi}{n}$$	
4	**Площади правильных** n**– угольников:** 1) $S_6 = \frac{6R^2}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$ 2) $S_8 = \frac{8R^2}{2}\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}R^2$ 3) $S_{12} = \frac{12R^2}{2}\sin\frac{\pi}{6} = 3R^2$ **Визуально не отличим от окружности:** $$S_{65537} = \frac{65537R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{65537} \approx 0.055R^2$$	

3.7 ОКРУЖНОСТЬ. СЕКТОР. СЕГМЕНТ

№	Формула:	2D иллюстрация:
1	**Диаметр:** $$D = 2R \ \ (R - \text{радиус})$$ **Площадь:** $$S = \pi R^2$$ **Длина окружности:** $$C = 2\pi R$$	Хорда, E, F, C, D, O, B, R, A, Окружность; Хорда, E, F, C, D, O, B, R, A, Круг
2	**Площадь сектора:** $$S_{\text{Сек}} = \frac{\pi R^2 \varphi^\circ}{360^\circ}$$ **Длина дуги:** $$L = \frac{\pi R \varphi^\circ}{180^\circ}$$	O, R, φ°, B, A, L
3	**Длина хорды:** $$k = 2R\sin\frac{\varphi^\circ}{2}$$ **Высота сегмента:** $$f = 2R\ \sin^2\frac{\varphi^\circ}{4}$$ **Площадь сегмента:** $$S_{\text{Сег}} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha),$$ где α — радианная мера угла	O, φ°, R, k, A, B, f, L

4	**Площадь кругового кольца:** $$S = \pi(R^2 - r^2),$$ где: R – большой радиус, r – малый радиус	
5	**Центральный угол:** $$\angle JOG = \overset{\frown}{JG} = \alpha = 2\beta$$ **Вписанный угол:** $$\angle JEG = \frac{1}{2}\overset{\frown}{JG} = \beta = \frac{\alpha}{2}$$ **Угол между касательной и хордой:** $$\angle ABF = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BF}$$ **Угол между касательной и секущей:** $$\angle BAC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BF}\right)$$ **Угол между двумя хордами:** $$\angle HKJ = \angle EKI = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{HJ} + \overset{\frown}{EI}\right)$$ **Угол между двумя секущими:** $$\angle CAD = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{FT}\right)$$ **Пропорциональность отрезков двух секущих:** $$AC \cdot AF = AD \cdot AT$$ **Пропорциональность отрезков касательной и секущей:** $$AB^2 = AF \cdot AC$$ **Пропорциональность отрезков двух хорд:** $$HK \cdot IK = EK \cdot JK$$	

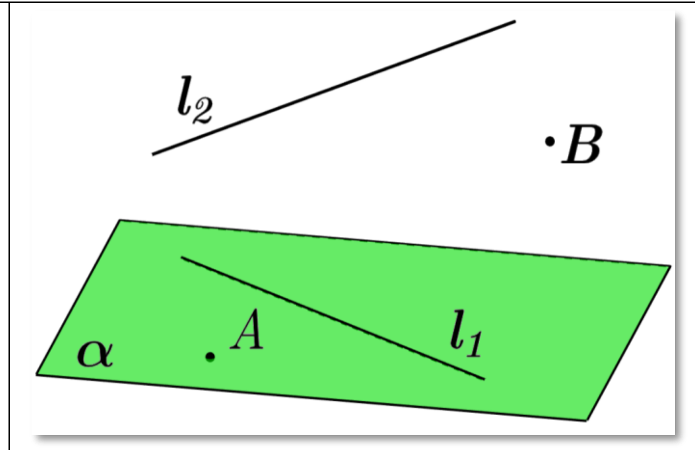
Раздел – IV. СТЕРЕОМЕТРИЯ

4.1 АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Аксиома–1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/sxanj3bn

$A \in \alpha, B \notin \alpha, l_1 \subset \alpha, l_2 \not\subset \alpha$

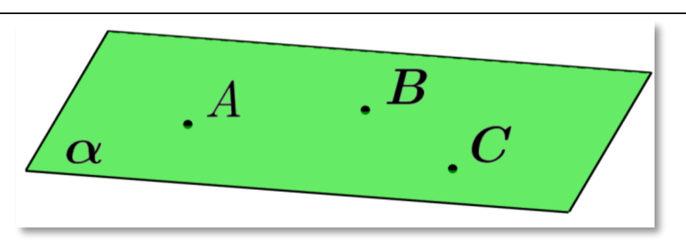




Аксиома–2 (Аксиома плоскости). Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/qtn7wkjm

$A, B, C \in \alpha$

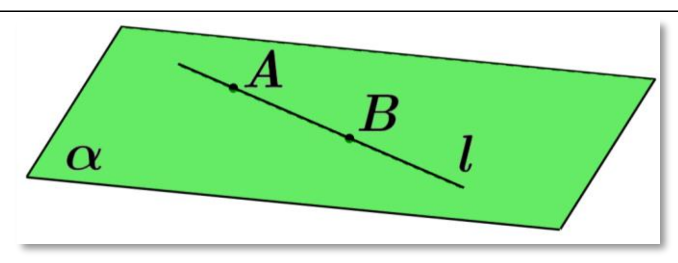




Аксиома–3 (Аксиома прямой и плоскости). Если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в этой плоскости.

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/tfamehdj

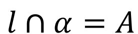
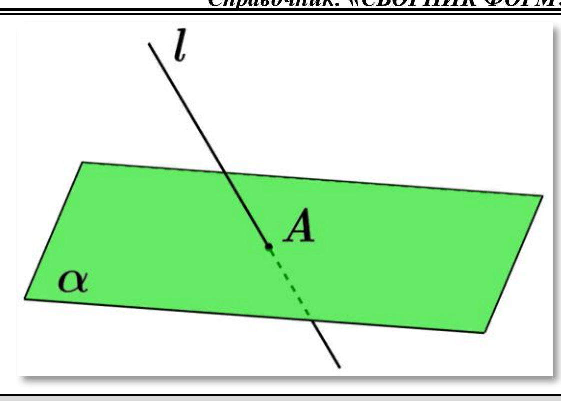
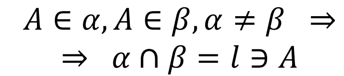
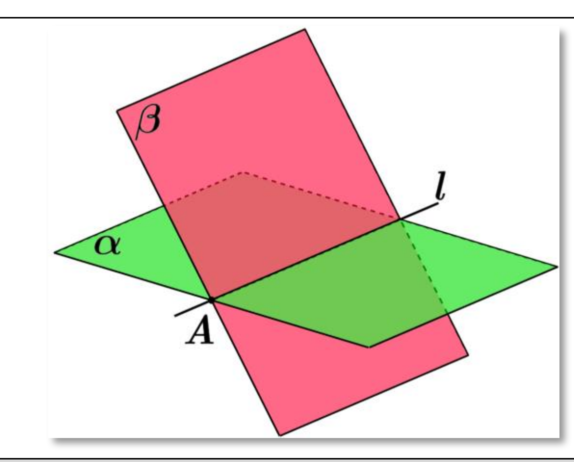
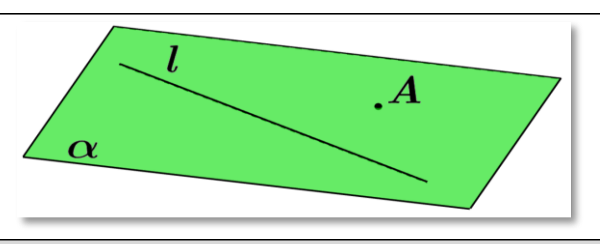
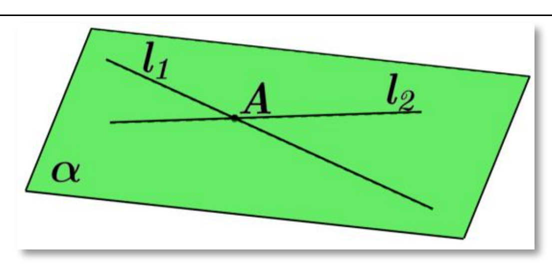
$A \in \alpha, B \in \alpha, AB \subset \alpha$





Замечание. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/xrmpuqep

 $l \cap \alpha = A$		
Аксиома–4 (Аксиома пересечения плоскостей). Если две плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.		
Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/eq5x3bqm		
 $A \in \alpha, A \in \beta, \alpha \neq \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha \cap \beta = l \ni A$		
Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.		
Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/rr8a4gtr		
$A \notin l \Rightarrow A, l \subset \alpha$		
Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.		
Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/kw5mgwqq		
$l_1 \cap l_2 = A \Rightarrow l_1, l_2 \subset \alpha$		

4.2 МНОГОГРАННИКИ. ПЛОЩАДЬ, ОБЪЕМ И 3D ИЛЛЮСТРАЦИИ

ПРИЗМА	**3D иллюстрация:**

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{БП}} = P_{\text{Осн}} h$$

Площадь боковой поверхности произвольной призмы:

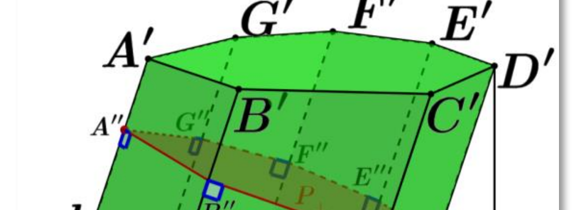
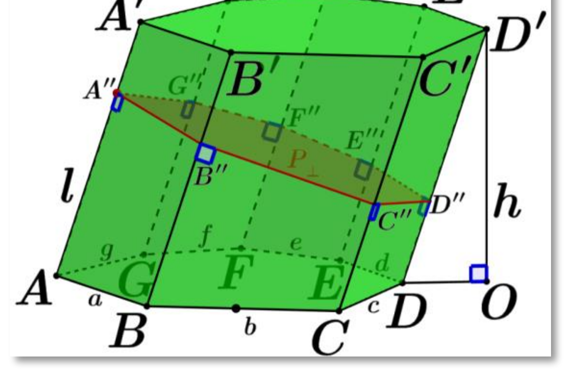
$$S_{\text{БП}} = P_{\perp} l$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{ПП}} = S_{\text{БП}} + 2S_{\text{Осн}}$$

Объем призмы:

$$V_{\text{Призмы}} = S_{\text{Осн}} h$$

Стороны основания призмы:

$$a, b, c, d, e, \dots$$

Периметр перпендикулярного сечения:

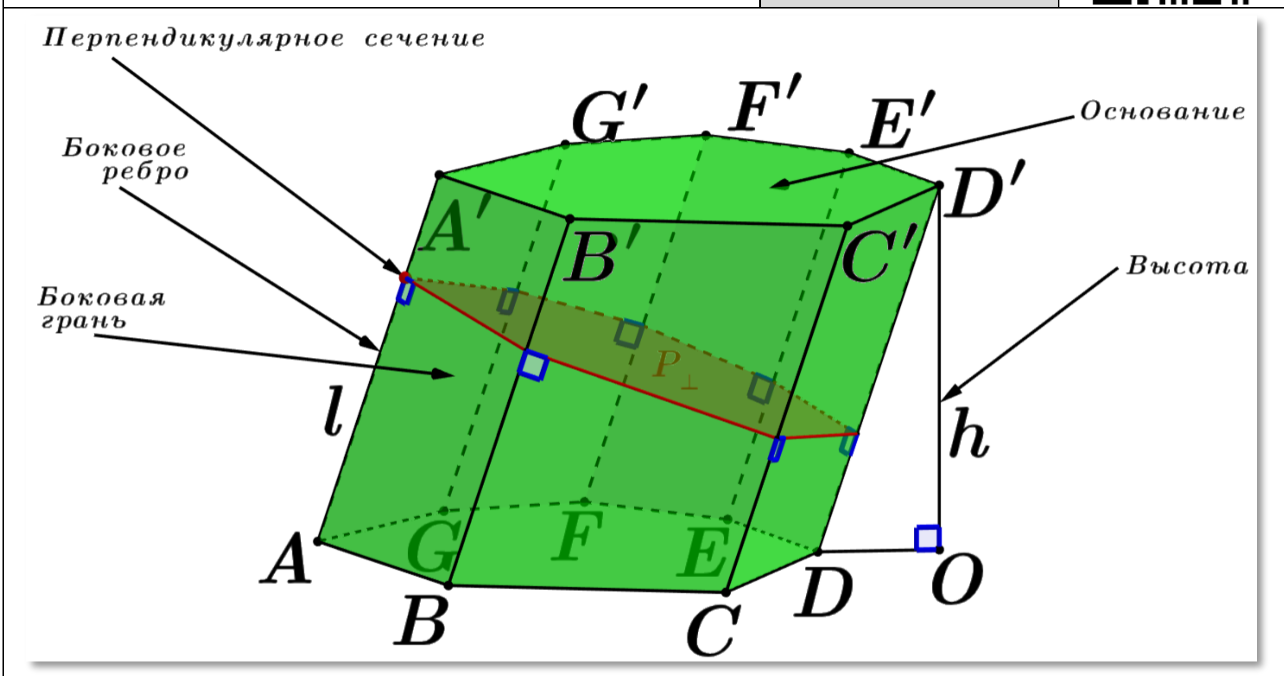
$$P_{\perp}$$

Длина бокового ребра: l

Ссылка на 3D иллюстрацию произвольной призмы: https://www.geogebra.org/classic/htegvdta

QR-Code:





<table>
<tr><th><u>КУБ</u></th><th>3D иллюстрация:</th></tr>
<tr><td>

Диагональ куба:

$$d = a\sqrt{3}$$

Площадь основания:

$$S_{\text{Осн}} = a^2$$

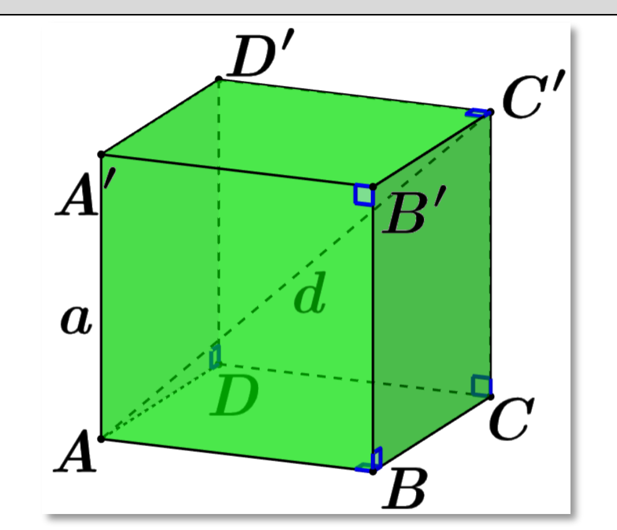
Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{пп}} = 6a^2$$

Объем:

$$V_{\text{Куба}} = a^3$$

</td><td>

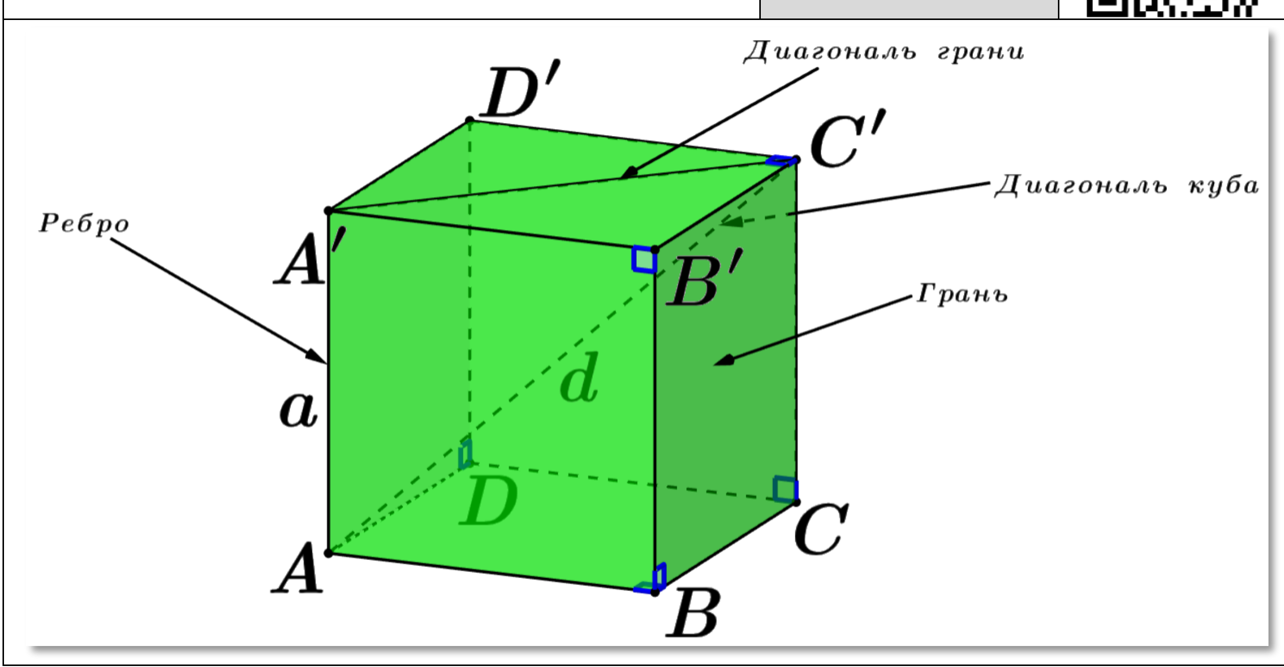


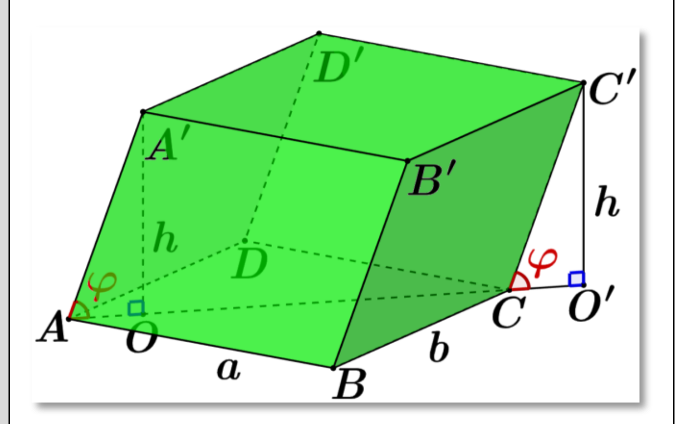
Ребро куба: a

Диагональ куба: d

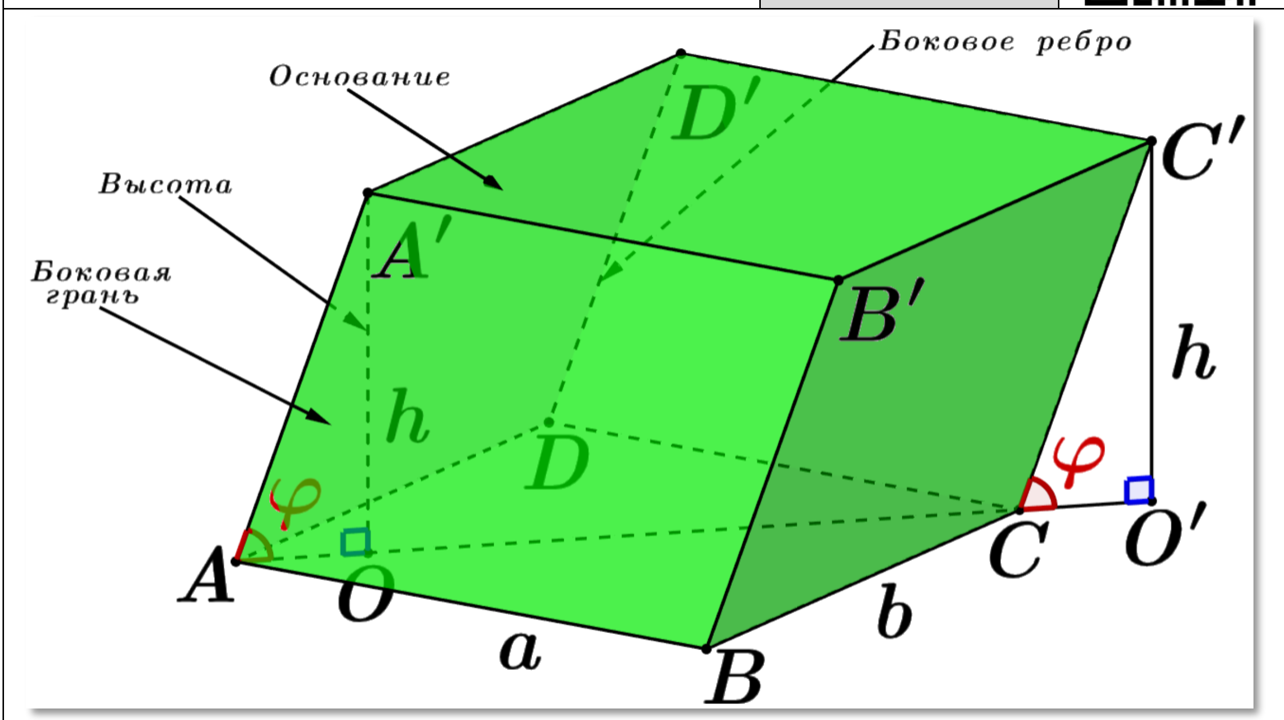
</td></tr>
</table>

Ссылка на 3D иллюстрацию куба: https://www.geogebra.org/classic/wdvnpzfb	QR-Code:	

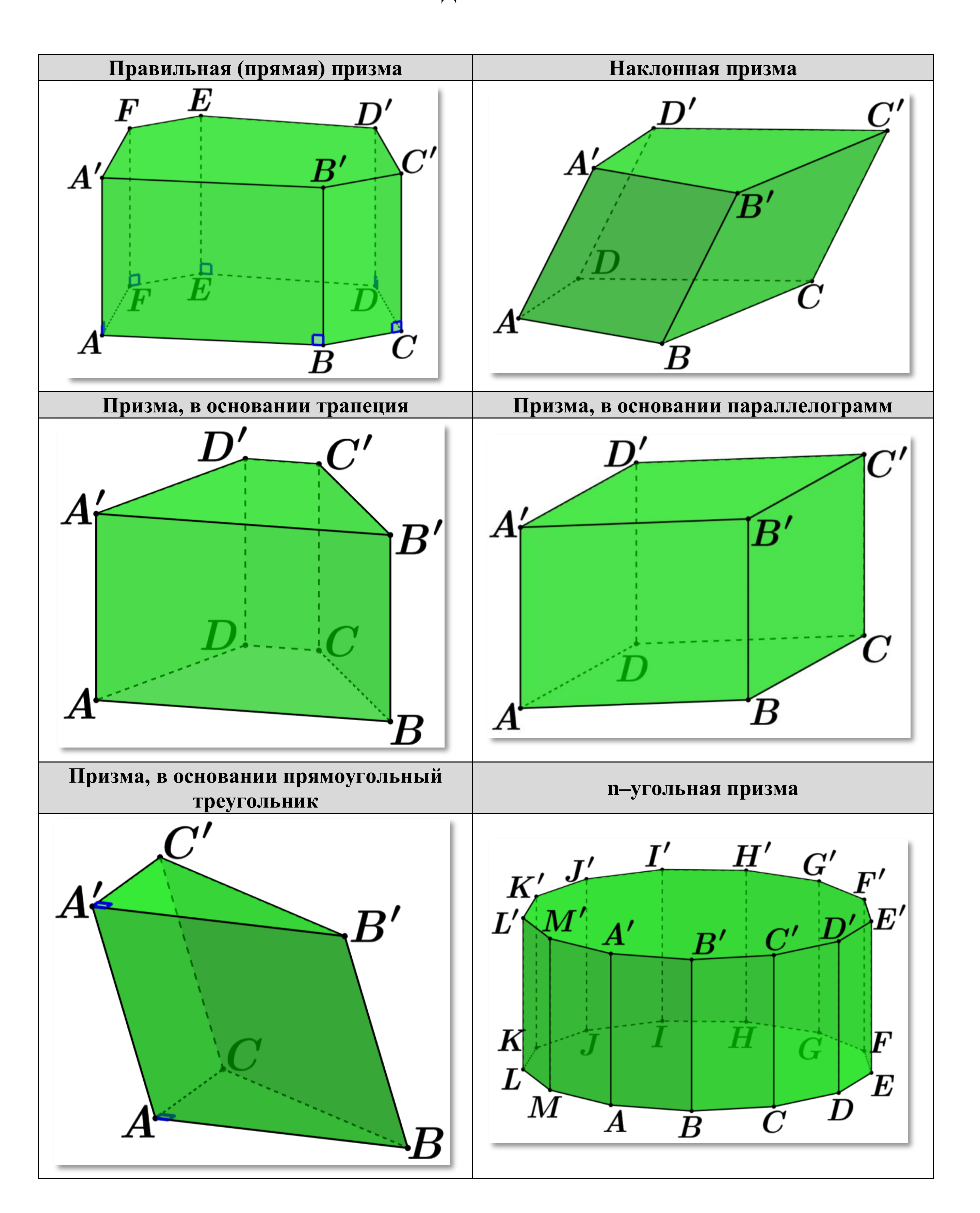


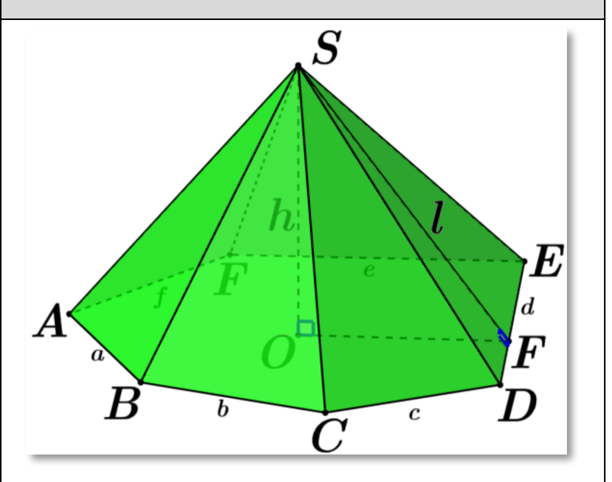
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД	3D иллюстрация:
Периметр основания параллелепипеда: $P_{\text{Осн}} = 2(a+b)$ **Площадь основания:** $S_{\text{Осн}} = ab\sin\alpha$ **Площадь боковой поверхности:** $S_{\text{БП}} = P_{\text{Осн}}h$ **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{ПП}} = S_{\text{БП}} + 2S_{\text{Осн}}$ **Объем прямого параллелепипеда:** $V_{\text{Параллел}} = S_{\text{Осн}}h$ **Объём наклонного параллелепипеда:** $V_{\text{Накл. Параллел}} = abc\sin\varphi$	 **Стороны основания параллелепипеда:** a и b **Боковое ребро параллелепипеда:** c **Высота параллелепипеда:** h

Ссылка на 3D иллюстрацию параллелепипеда: https://www.geogebra.org/classic/egwkxnuh	QR-Code:	

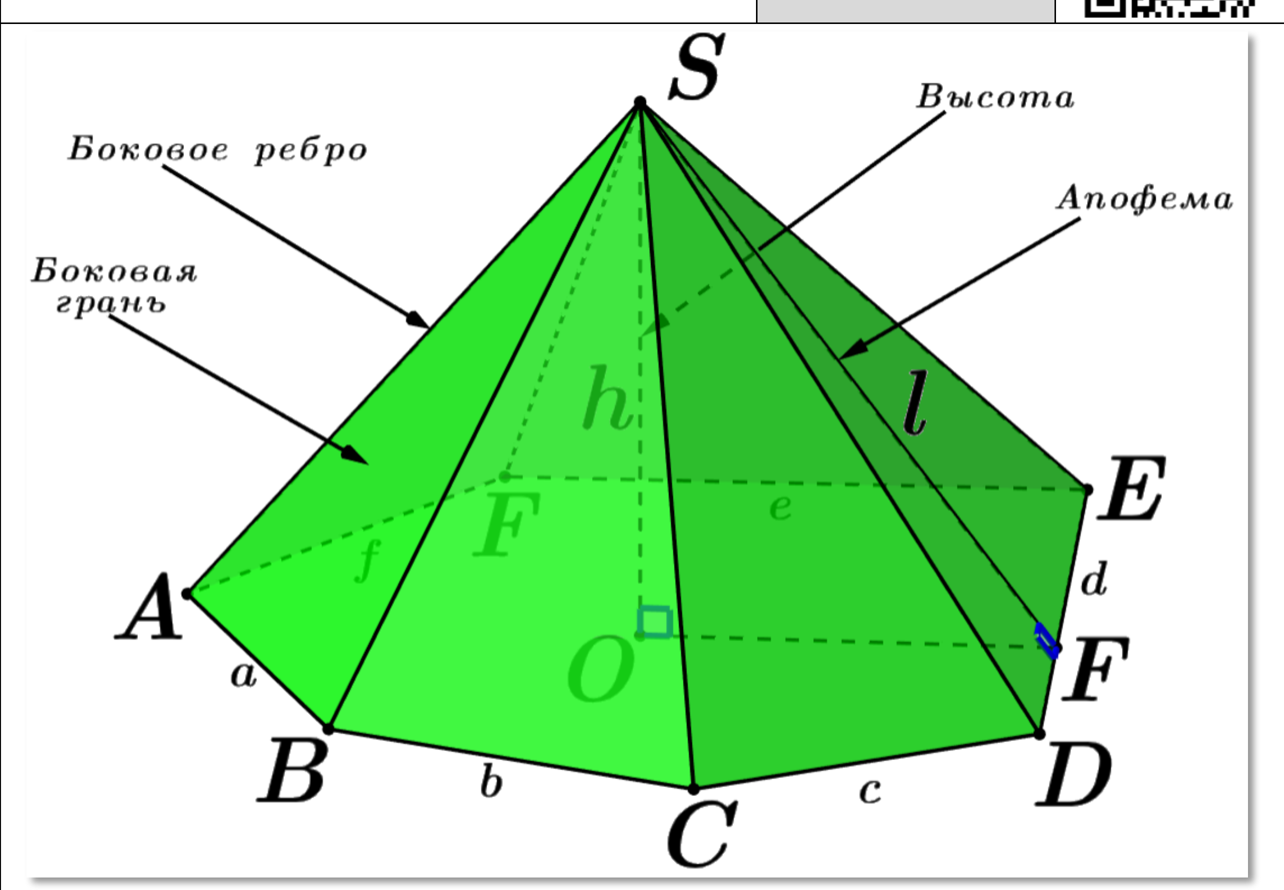


ВИДЫ ПРИЗМ


Правильная (прямая) призма
F E D′ A′ B′ C′ F E D A B C
Наклонная призма
D′ C′ A′ B′ D C A B
Призма, в основании трапеция
D′ C′ A′ B′ D C A B
Призма, в основании параллелограмм
D′ C′ A′ B′ C D A B
Призма, в основании прямоугольный треугольник
C′ A′ B′ C A B
n–угольная призма
I′ H′ J′ G′ K′ F′ L′ M′ E′ A′ B′ C′ D′ K J I H G F L E M A B C D

ПИРАМИДА	3D иллюстрация:
Площадь боковой поверхности: $$S_{\text{БП}} = \frac{1}{2} P_{\text{Осн}} l$$ **Площадь полной поверхности:** $$S_{\text{ПП}} = S_{\text{БП}} + S_{\text{Осн}}$$ **Объем пирамиды:** $$V_{\text{Пирамиды}} = \frac{1}{3} S_{\text{Осн}} h$$	 **Стороны основания пирамиды:** $a, b, c, d, \ldots$ **Высота пирамиды:** h **Апофема (высота боковой грани):** l

Ссылка на 3D иллюстрацию пирамиды: https://www.geogebra.org/classic/q2n5y9rt	QR-Code:	



<table>
<tr><th><u>ТЕТРАЭДР</u></th><th>3D иллюстрация:</th></tr>
<tr><td>

Площадь основания:

$$S_{\text{Осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

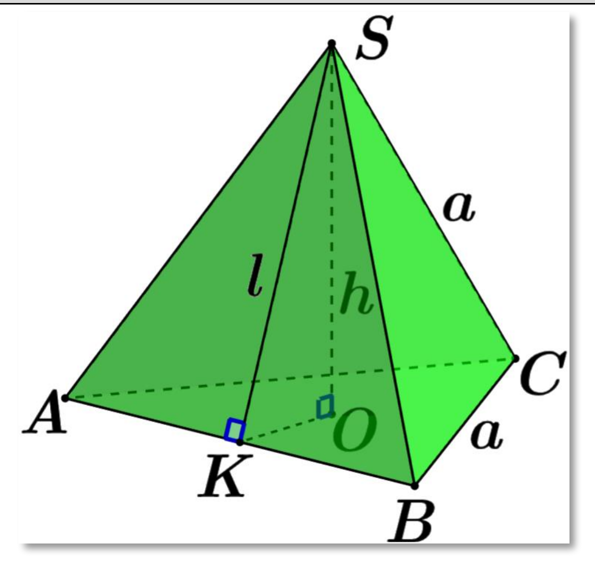
Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{ПП}} = 4S_{\text{Осн}} = a^2\sqrt{3}$$

Объем пирамиды:

$$V_{\text{Пирамиды}} = \frac{1}{3}S_{\text{Осн}}h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$$

</td><td>



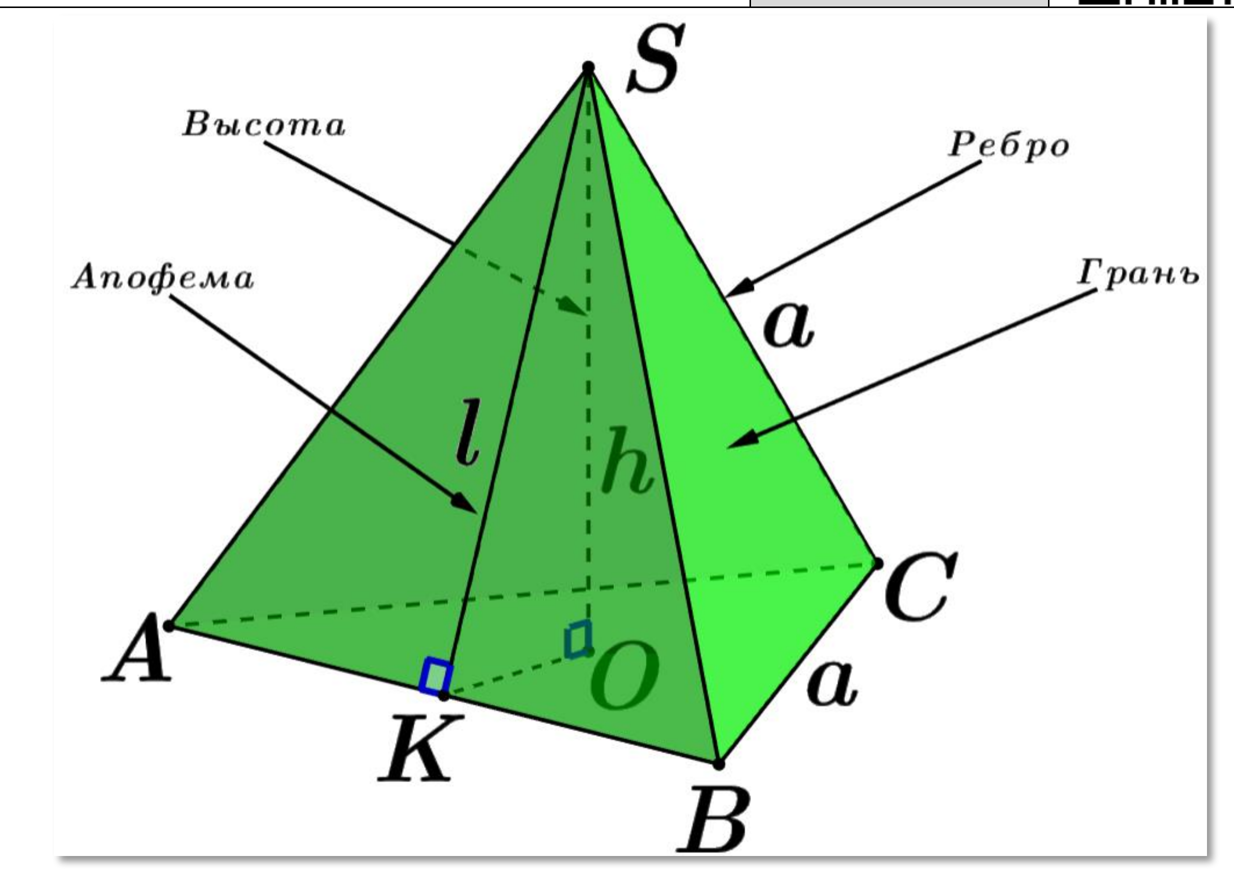
Сторона основания тетраэдра: a

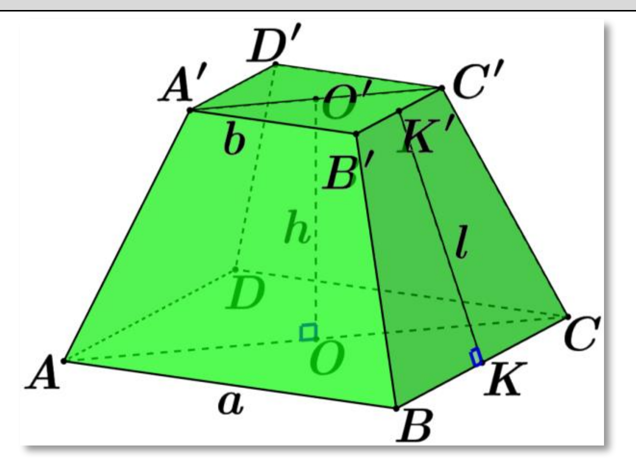
Высота тетраэдра: h

Апофема (высота боковой грани): l

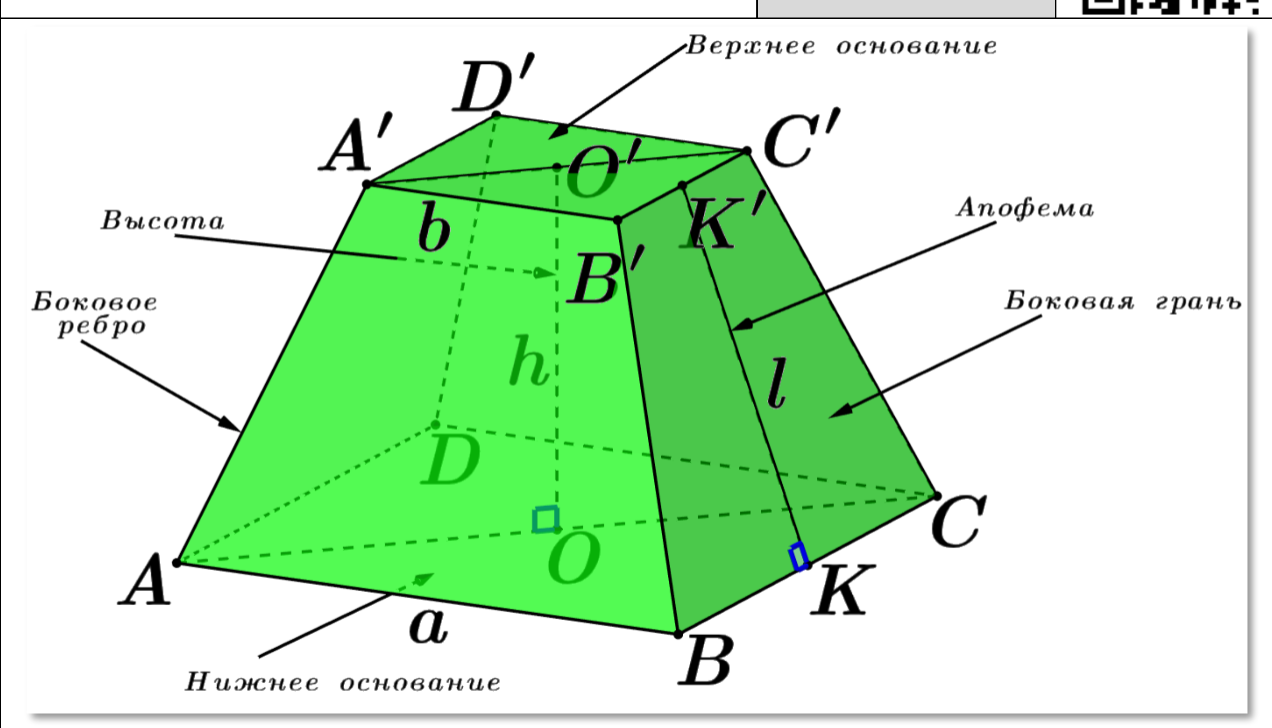
</td></tr>
</table>

Ссылка на 3D иллюстрацию тетраэдра: https://www.geogebra.org/classic/gxtdvy3d	QR-Code:	



УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА	**3D иллюстрация:**
Площадь боковой поверхности: $$S_{БП} = \frac{P_1 + P_2}{2} l$$ **Площадь полной поверхности:** $$S_{ПП} = S_{БП} + S_{Осн}$$ **Объем усеченной пирамиды:** $$V_{Усеч.\ Пир} = \frac{1}{3} h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$	 **Периметры основания ус. пирамиды:** P_1 и P_2 **Площади основания ус. пирамиды:** S_1 и S_2 **Высота ус. пирамиды:** h **Апофема (высота боковой грани):** l

Ссылка на 3D иллюстрацию усеченной пирамиды: https://www.geogebra.org/classic/adesngxk	QR-Code:	

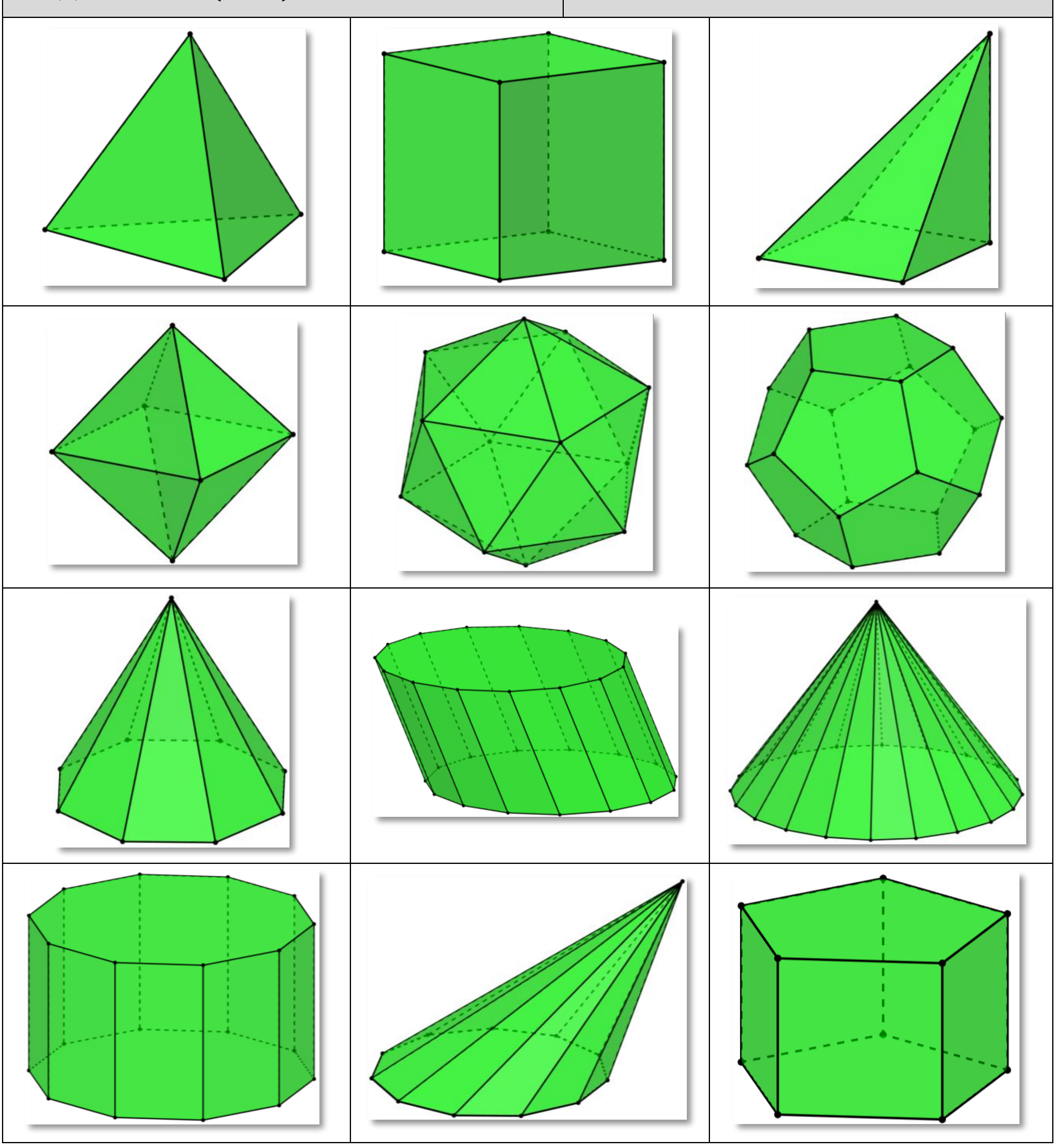


ВИДЫ ПИРАМИД

Произвольная пирамида	Наклонная пирамида	Прямоугольная пирамида
Правильная (прямая) пирамида	**Прямоугольная усеченная пирамида**	**Усеченная пирамида**
Пирамида, в основании трапеция	**Пирамида,в основании прямоугольный треугольник**	**Пирамида, в основании правильный n–угольник**

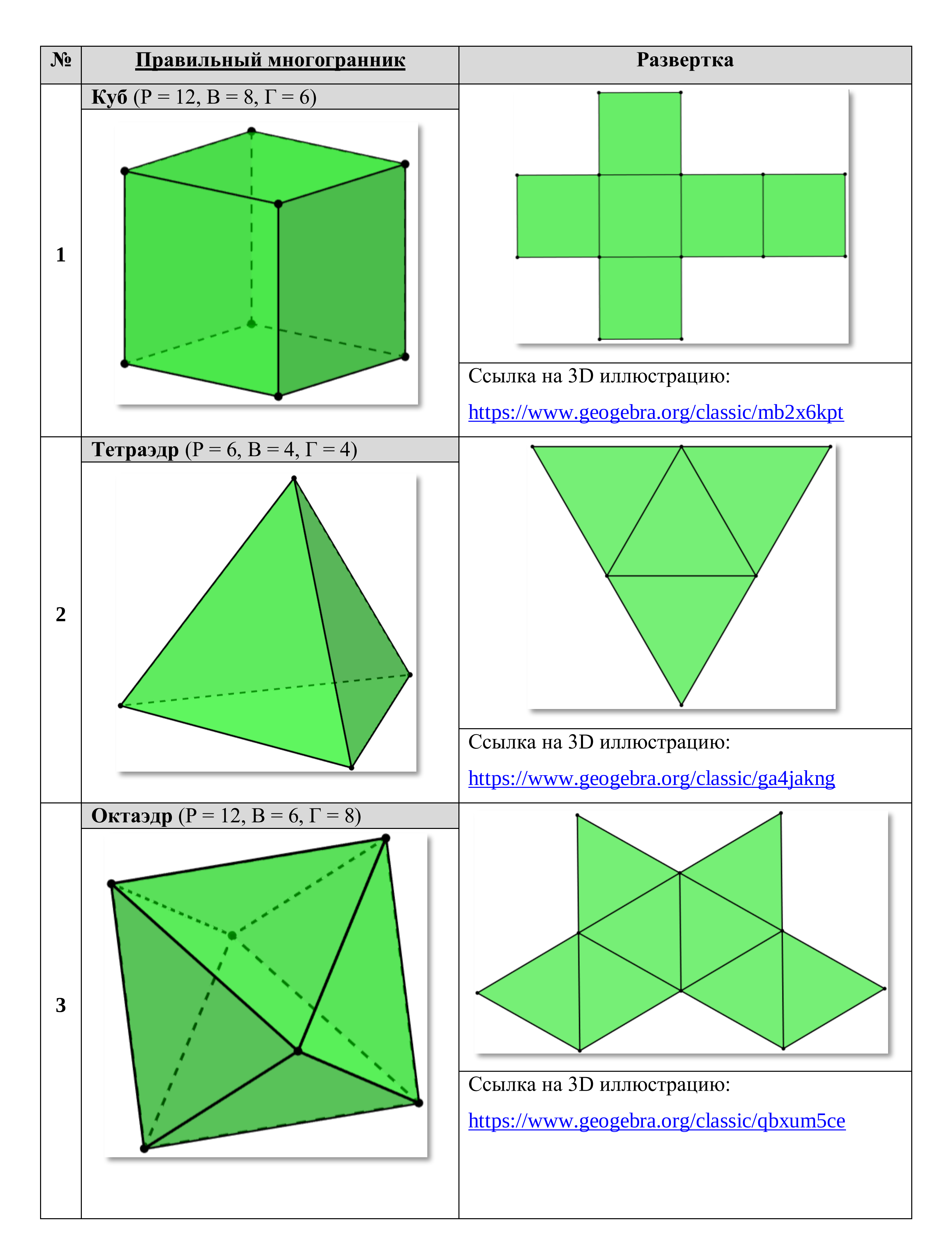
ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК

Теорема Эйлера для призм:	**Теорема Эйлера для пирамид:**
$(В + Г - Р) = 2$	$(В + Г - Р) = 2$
Ребра: $3n$	Ребра: $2n$
Вершины: $2n$	Вершины: $n + 1$
Грани: $n + 2$	Грани: $n + 1$
Диагонали: $n(n - 3)$	



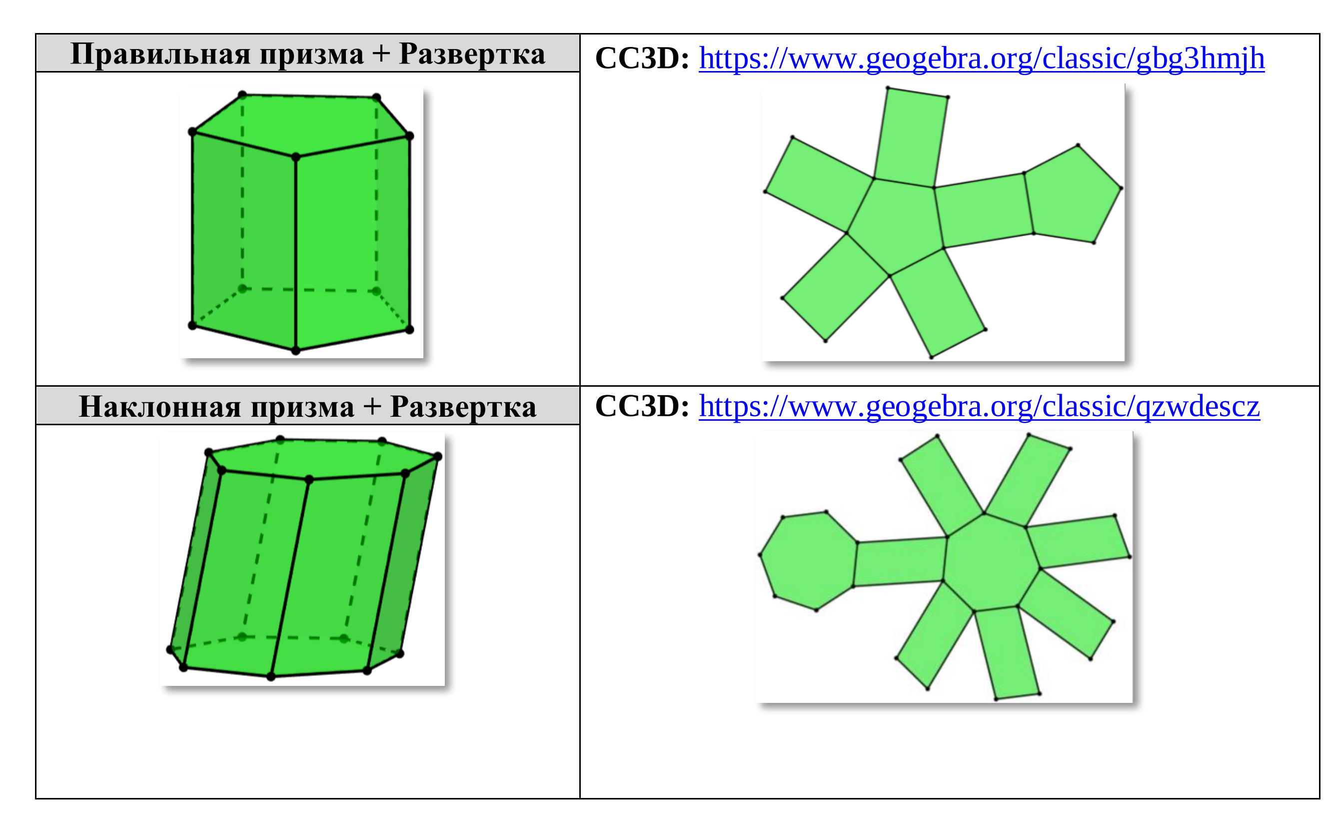
РАЗВЕРТКИ МНОГОГРАННИКОВ С 3D ИЛЛЮСТРАЦИЯМИ

(Р – количество ребер, В – количество вершин, Г – количество граней)

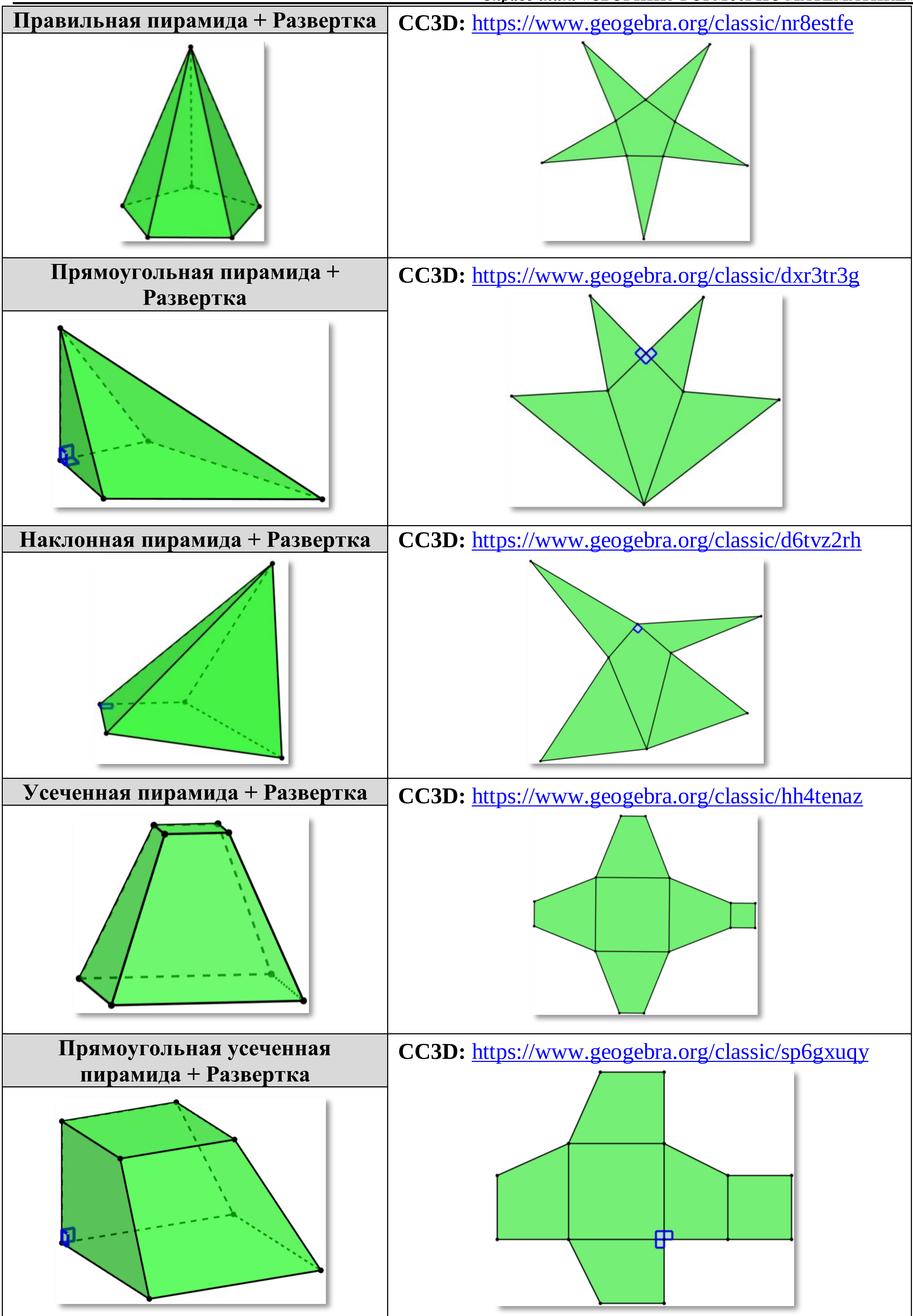


№	Правильный многогранник	Развертка
1	**Куб** (Р = 12, В = 8, Г = 6)	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/mb2x6kpt
2	**Тетраэдр** (Р = 6, В = 4, Г = 4)	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ga4jakng
3	**Октаэдр** (Р = 12, В = 6, Г = 8)	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/qbxum5ce

4	**Икосаэдр** (Р = 30, В = 12, Г = 20)	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ahqsxcpu
5	**Додекаэдр** (Р = 30, В = 20, Г = 12)	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/sdgmfsjn

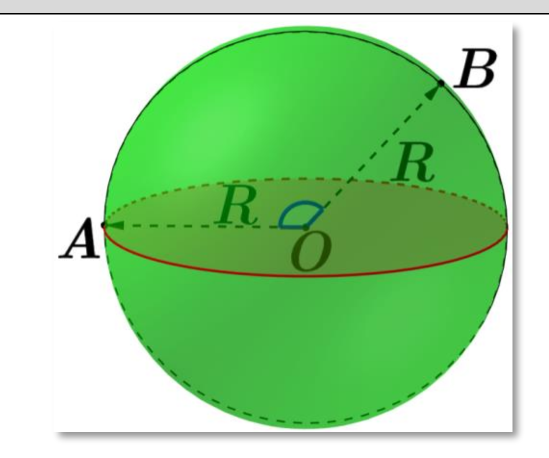


Правильная призма + Развертка	**СС3D:** https://www.geogebra.org/classic/gbg3hmjh
Наклонная призма + Развертка	**СС3D:** https://www.geogebra.org/classic/qzwdescz

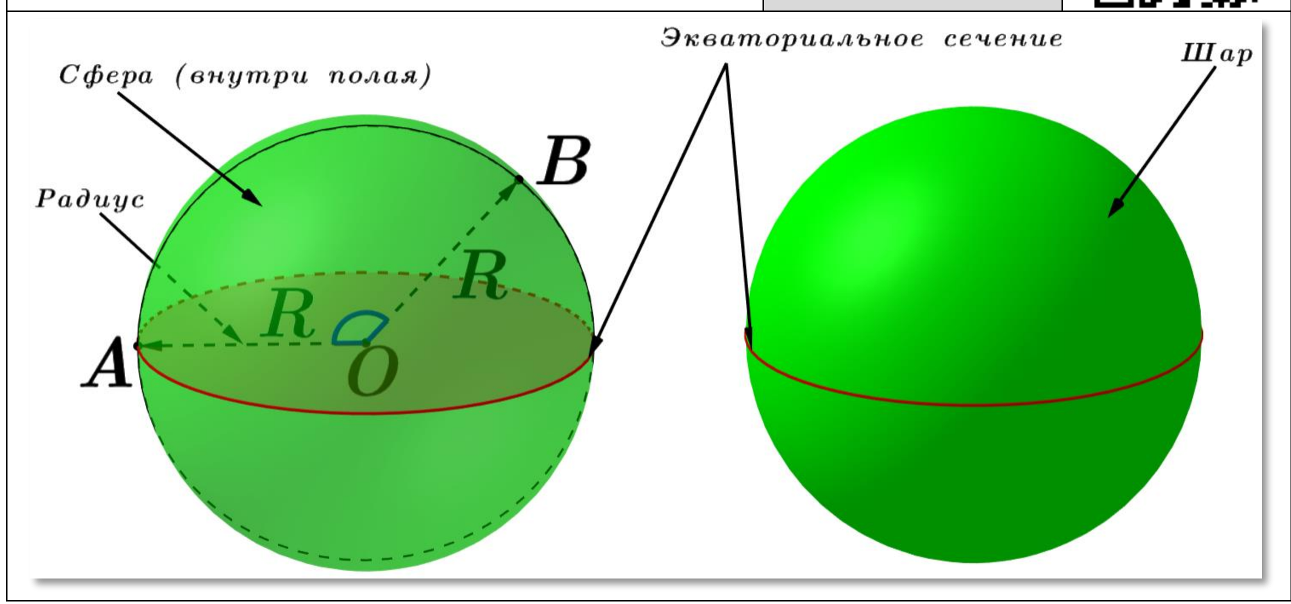


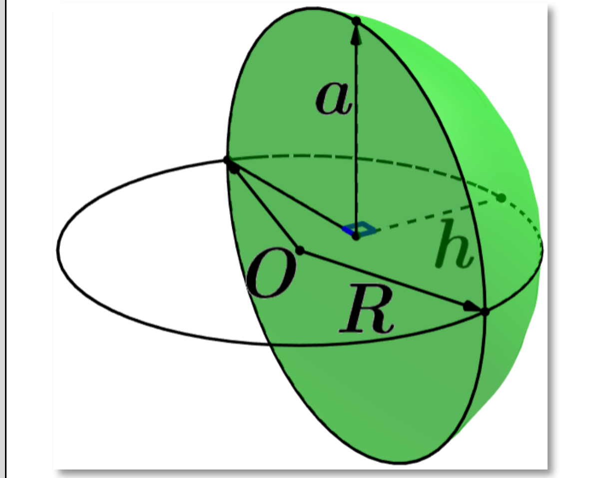
Правильная пирамида + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/nr8estfe
Прямоугольная пирамида + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/dxr3tr3g
Наклонная пирамида + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/d6tvz2rh
Усеченная пирамида + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/hh4tenaz
Прямоугольная усеченная пирамида + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/sp6gxuqy

4.3 ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. ПЛОЩАДЬ, ООБЪЕМ И 3D ИЛЛЮСТРАЦИИ

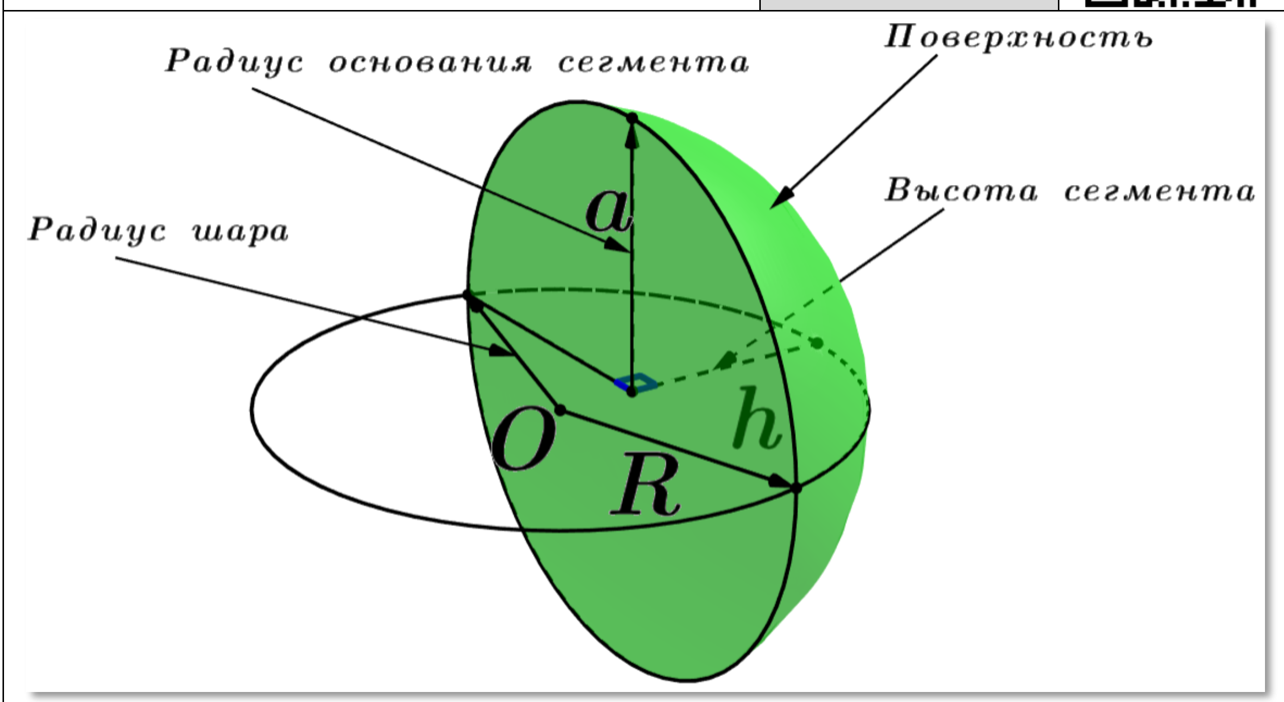
СФЕРА. ШАР	3D иллюстрация:
Площадь полной поверхности: $S_{\text{ПП}} = 4\pi R^2$ **Объем шара:** $V_{\text{Шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ **Площадь экваториального сечения:** $S_{\text{Экв. сеч}} = \pi R^2$	 **Радиус шара с центром в т. *O*:** R

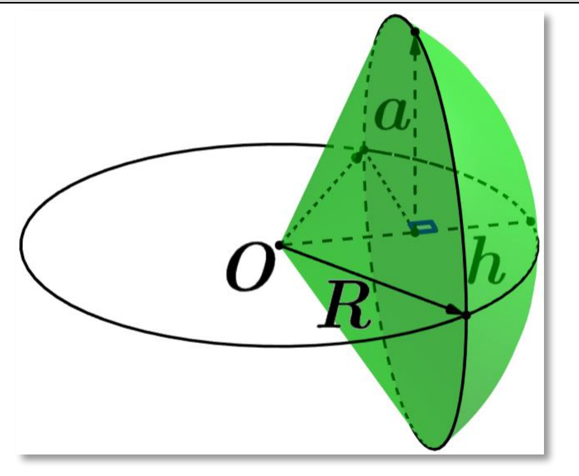
Ссылка на 3D иллюстрацию сферы (шара): https://www.geogebra.org/classic/rwznfgpw	QR-Code:	



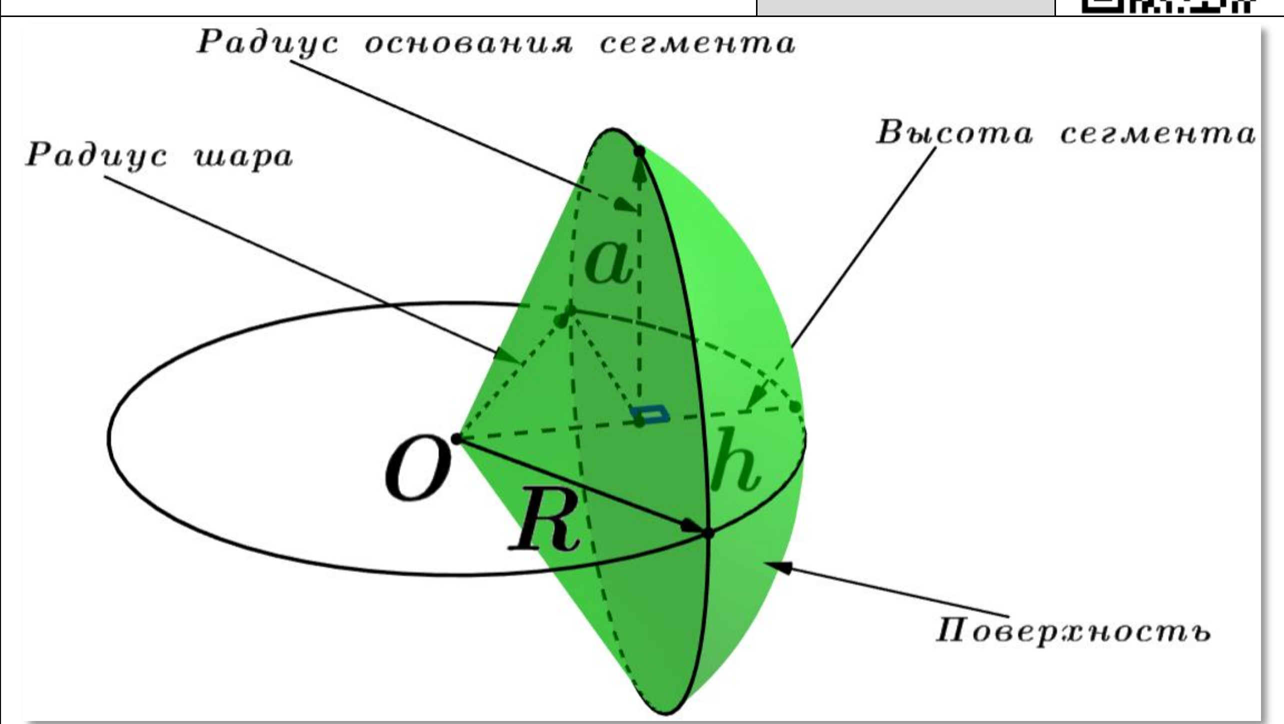
ШАРОВОЙ СЕГМЕНТ	3D иллюстрация:
Радиус основания сегмента: $a^2 = h(2R - h)$ **Площадь шаровой поверхности:** $S_{\text{ШП}} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$ **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{ПП}} = \pi(h^2 + 2a^2)$ **Объем шарового сегмента:** $V_{\text{ШС}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$	 **Радиус шара с центром в т. *O*:** R **Радиус основания сегмента:** a **Высота сегмента:** h

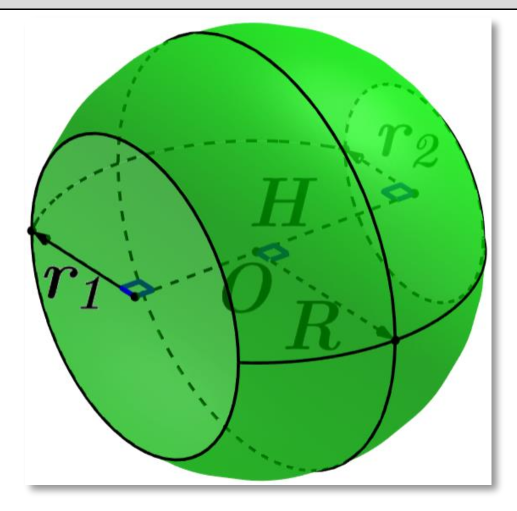
Ссылка на 3D иллюстрацию шарового сегмента: https://www.geogebra.org/classic/vv2kkbux	QR-Code:	



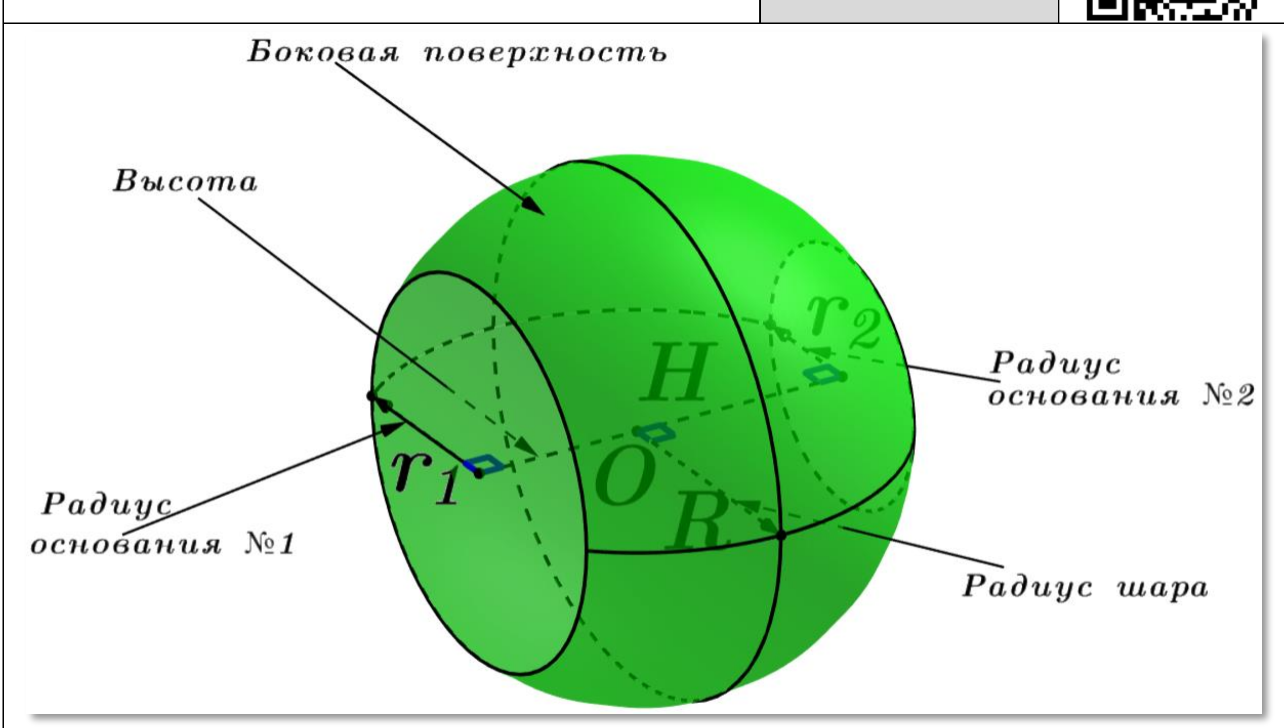
ШАРОВОЙ СЕКТОР	3D иллюстрация:
Площадь полной поверхности: $S_{\text{ПП}} = \pi R(2h + a)$ **Объем шарового сектора:** $V_{\text{ШС}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$	 **Радиус шара с центром в т. *O*:** R **Радиус основания сегмента:** a **Высота сегмента:** h

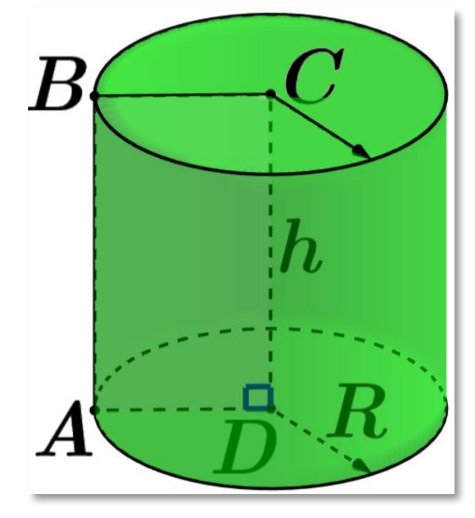
Ссылка на 3D иллюстрацию шарового сектора: https://www.geogebra.org/classic/ygyxenmy	QR-Code:	

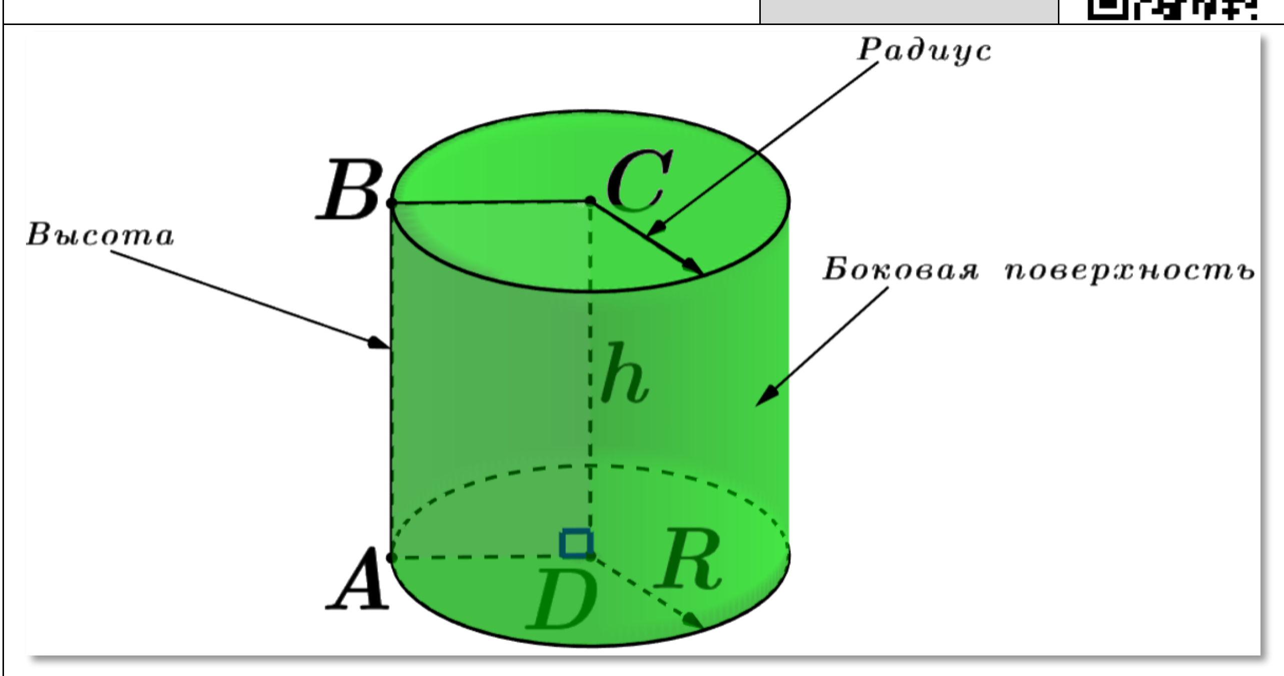


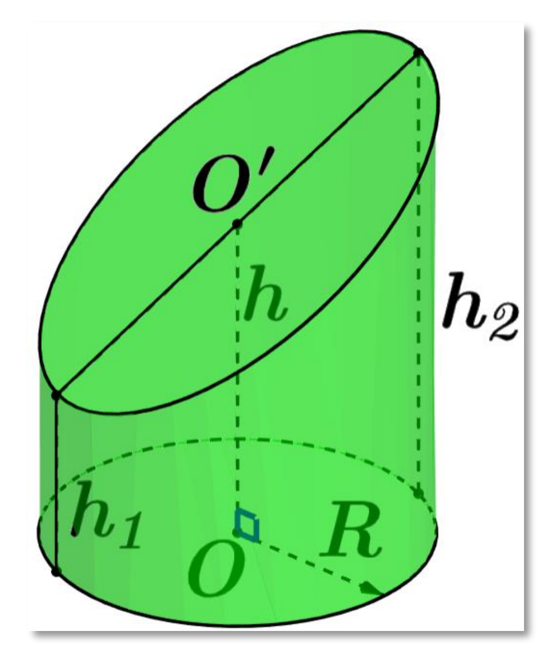
ШАРОВОЙ ПОЯС	3D иллюстрация:
Площадь боковой поверхности: $S_{БП} = 2\pi RH$ **Площадь полной поверхности:** $S_{ПП} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + 2RH)$ **Объем шарового пояса:** $V_{ШП} = \frac{\pi}{6}H(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$	 **Радиус шара с центром в т. *O*:** R **Радиусы двух оснований шарового пояса:** r_1 и r_2 **Высота шарового пояса:** H

Ссылка на 3D иллюстрацию шарового пояса: https://www.geogebra.org/classic/k2ze9utx	QR-Code:	

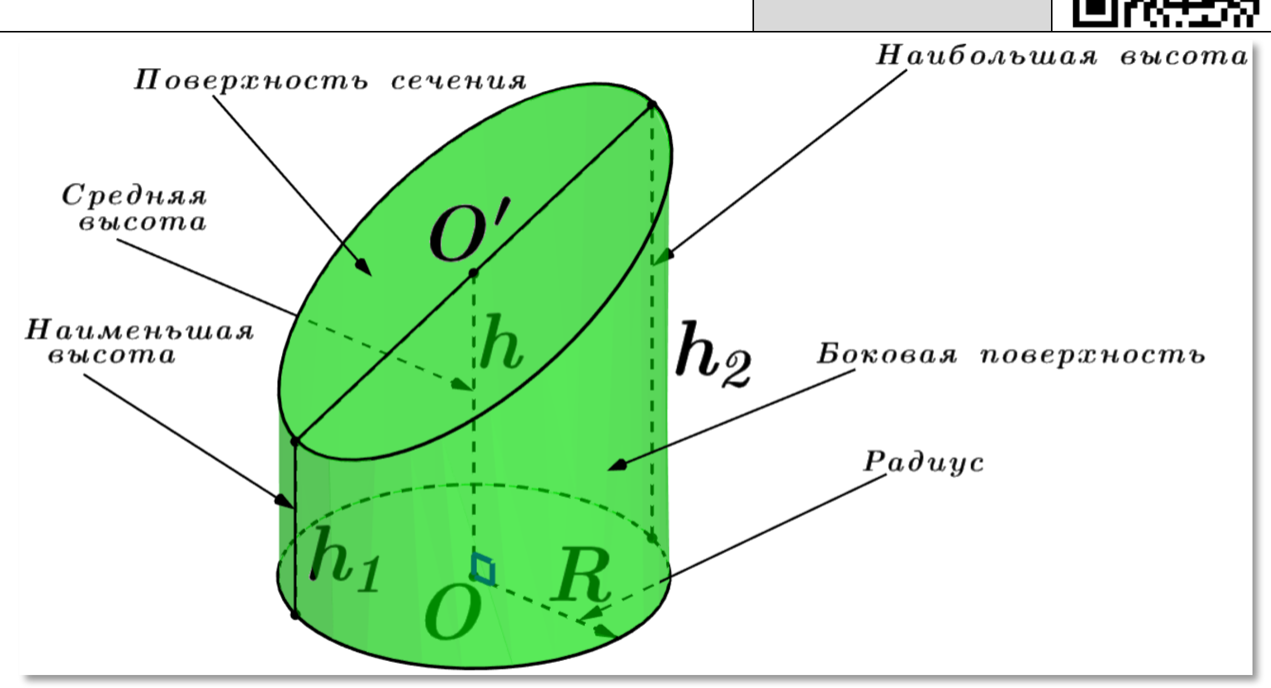


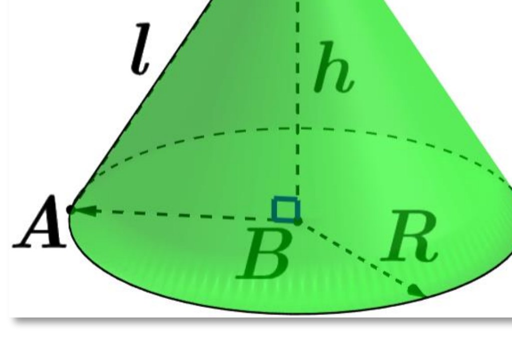
<table>
<tr><th colspan="2"><u>Цилиндр</u></th><th colspan="2">3D иллюстрация:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Площади оснований:
$$S_{\text{Осн}} = 2\pi R^2$$
Площадь боковой поверхности:
$$S_{\text{БП}} = 2\pi Rh$$
Площадь полной поверхности:
$$S_{\text{ПП}} = 2\pi R(h + R)$$
Объем цилиндра:
$$V_{\text{Цилиндра}} = \pi R^2 h$$
Площадь осевого сечения:
$$S_{\text{Ос.Сеч.}} = 2Rh$$</td><td colspan="2">

Радиус основания цилиндра: R
Высота цилиндра: h</td></tr>
<tr><td>Ссылка на 3D иллюстрацию цилиндра:
https://www.geogebra.org/classic/unbaz9m8</td><td colspan="2">QR-Code:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
</table>

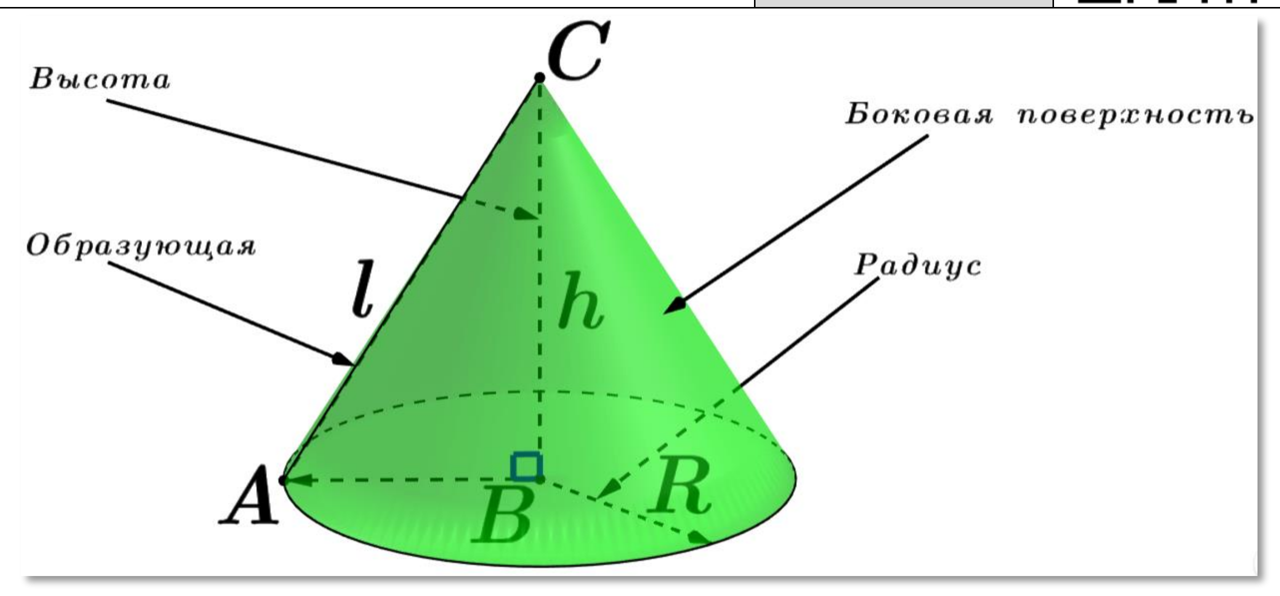
УСЕЧЕННЫЙ ЦИЛИНДР	3D иллюстрация:
Средняя высота усеченного цилиндра: $$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$ **Площадь основания:** $$S_{\text{Осн}} = \pi R^2$$ **Площадь сечения:** $$S_{\text{Сеч}} = \pi R \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}(h_2 - h_1)^2}$$ **Площадь боковой поверхности:** $$S_{\text{БП}} = 2\pi R h$$ **Площадь полной поверхности:** $$S_{\text{ПП}} = S_{\text{БП}} + S_{\text{Осн}} + S_{\text{Сеч}} =$$ $$= \pi R \left[R + h_1 + h_2 + \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}(h_2 - h_1)^2} \right]$$ **Объем цилиндра:** $$V_{\text{Усеч. Цил}} = \pi R^2 h = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}$$	 **Радиус основания ус. цилиндра:** R **Средняя высота ус. цилиндра:** h **Наименьшая высота ус. цилиндра:** h_1 **Наибольшая высота ус. цилиндра:** h_2

Ссылка на 3D иллюстрацию усеченного цилиндра: https://www.geogebra.org/classic/bwp54yxh	QR-Code:	



КОНУС	**3D иллюстрация:**
Площадь оснований: $S_{\text{Осн}} = \pi R^2$ **Площадь боковой поверхности:** $S_{\text{БП}} = \pi R l = \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{\pi\varphi}{180°}$, ($\varphi$ − градус) **Площадь полной поверхности:** $S_{\text{ПП}} = \pi R(l + R)$ **Объем конуса:** $V_{\text{Конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ **Площадь осевого сечения:** $S_{\text{Ос.Сеч.}} = Rh$	 **Радиус основания конуса:** R **Высота конуса:** h **Образующая конуса:** l

Ссылка на 3D иллюстрацию конуса: https://www.geogebra.org/classic/rjeb9peb	QR-Code:	



<table>
<tr><th>УСЕЧЕННЫЙ КОНУС</th><th>3D иллюстрация:</th></tr>
<tr><td>

Площади оснований:

$$S_{\text{Осн}} = \pi(R^2 + r^2)$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{БП}} = \pi l(R + r)$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{ПП}} = \pi(R^2 + l(R + r) + r^2)$$

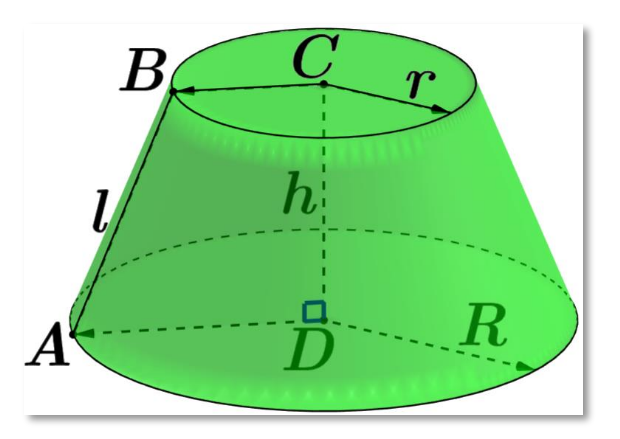
Объем усеченного конуса:

$$V_{\text{Ус. Кон}} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

Площадь осевого сечения:

$$S_{\text{Ос.Сеч.}} = (R + r)h$$

</td><td>



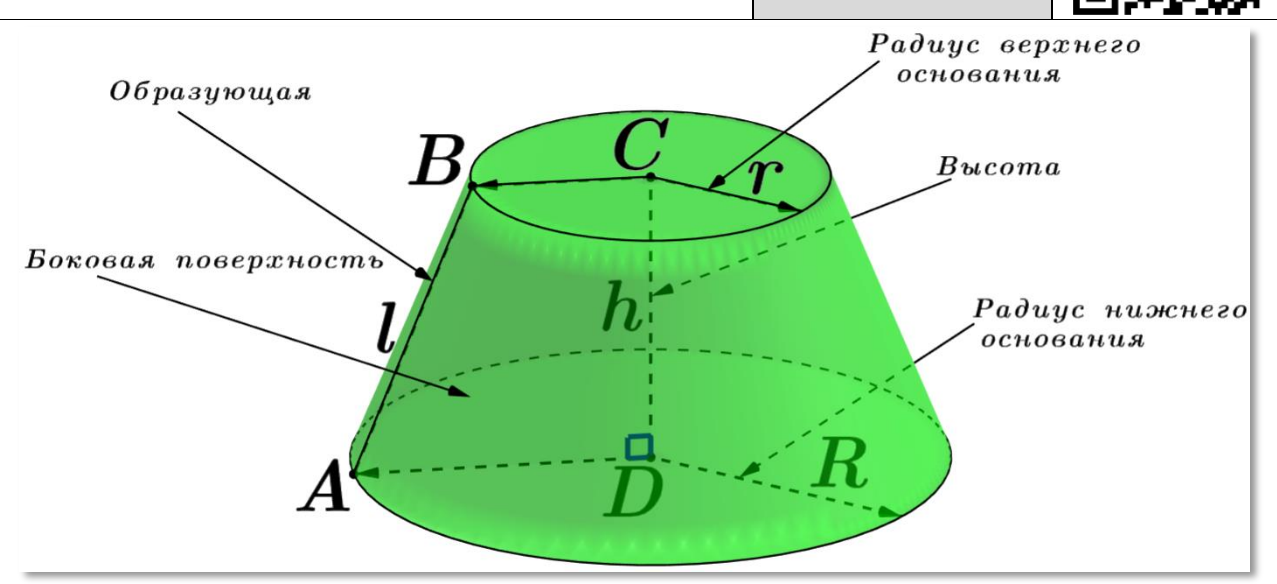
Радиусы оснований конуса: R и r

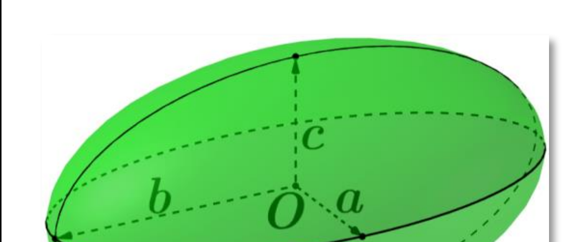
Высота ус. конуса: h

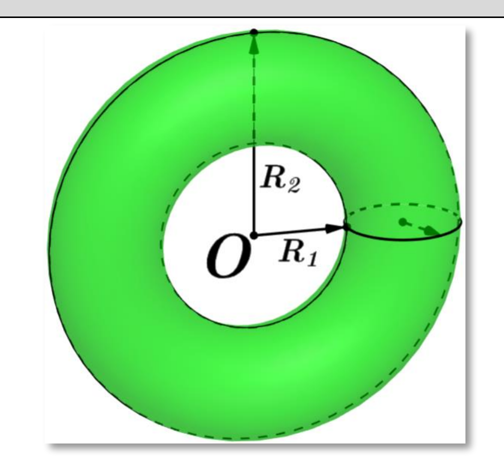
Образующая ус. конуса: l

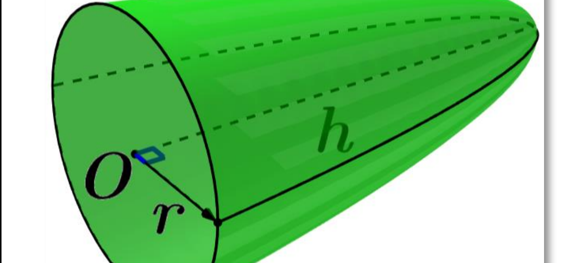
</td></tr>
</table>

Ссылка на 3D иллюстрацию конуса: https://www.geogebra.org/classic/rjkgqg8d	QR-Code:	

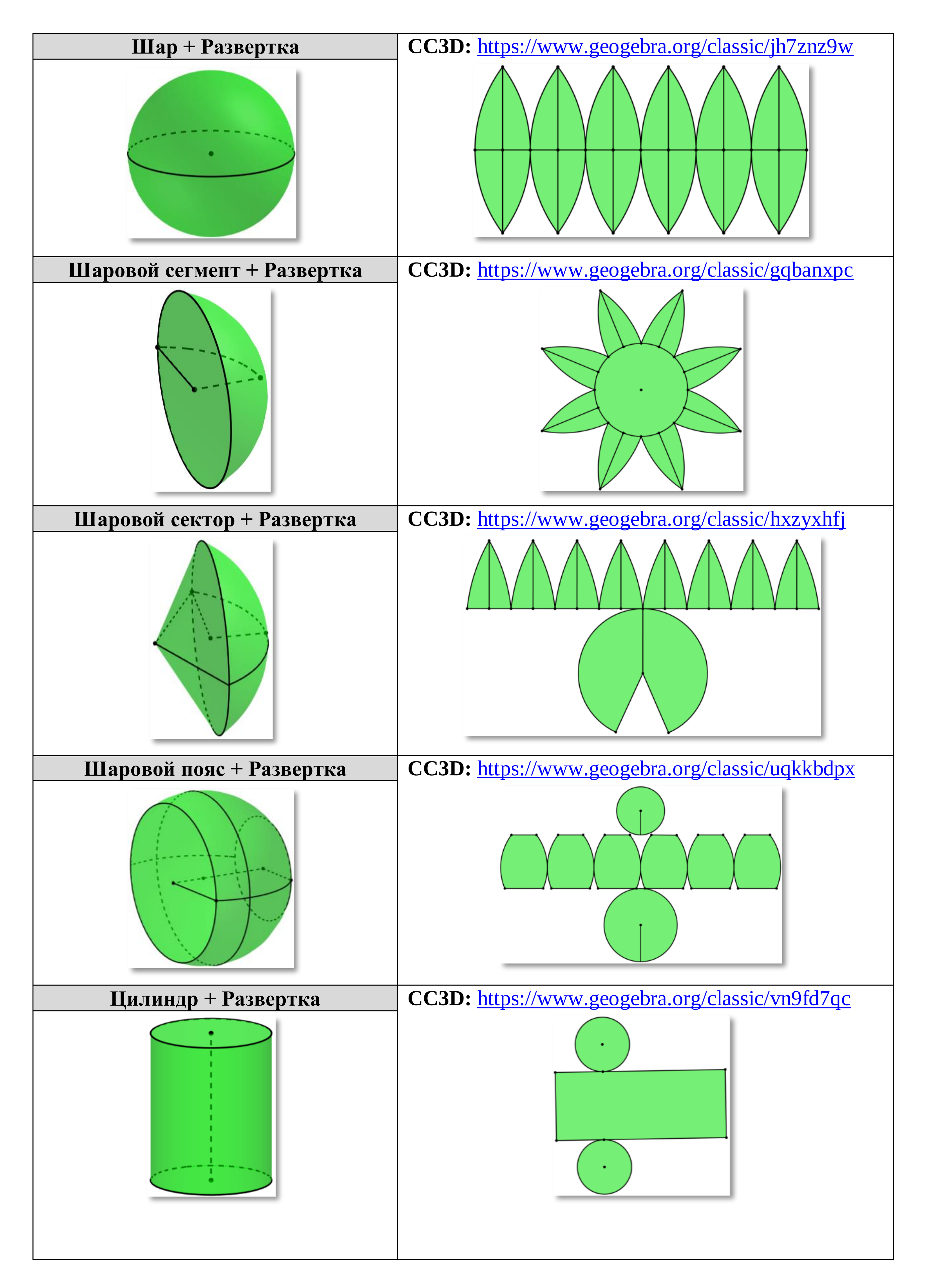


ЭЛЛИПСОИД	3D иллюстрация:
Объем: $$V_{\text{Эллипс}} = \frac{4}{3}\pi \cdot abc$$ **Площадь:** $$S_{\text{ПП}} = 4\pi \left[\frac{a^p b^p + a^p c^p + b^p c^p}{3}\right]^{\frac{1}{p}},$$ где: $p = 1.6075$	
Ссылка на 3D иллюстрацию эллипсоиды: https://www.geogebra.org/classic/f5yssknw	**Полуоси эллипсоиды:** a, b, c

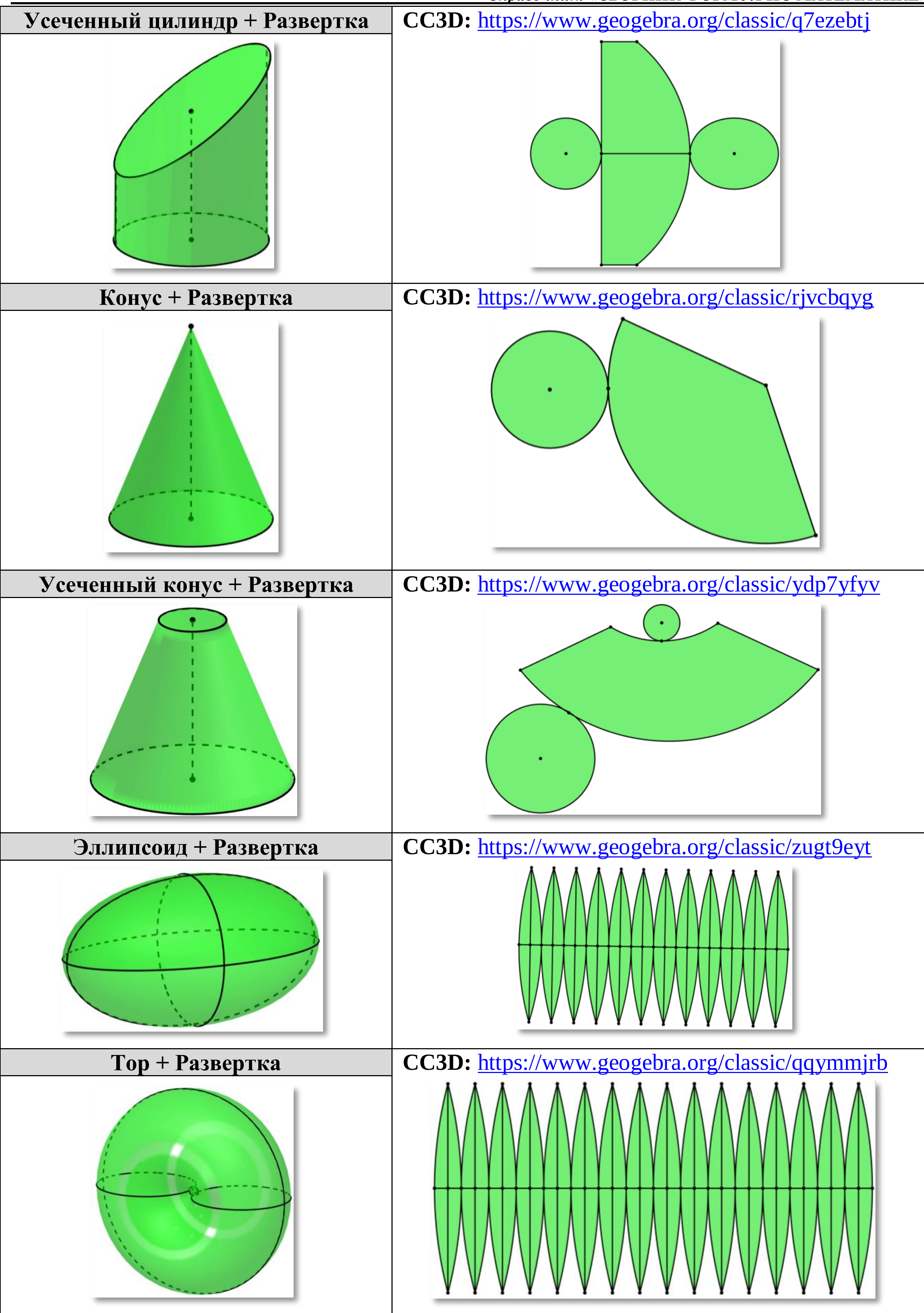
ТОР	3D иллюстрация:
Площадь полной поверхности: $$S_{\text{ПП}} = \pi^2 \left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)$$ **Объем:** $$V_{\text{Тора}} = \frac{1}{4}\pi^2 (R_1 + R_2)(R_2 - R_1)^2$$	
Ссылка на 3D иллюстрацию тора: https://www.geogebra.org/classic/ydcgz4cz	**Внешний радиус тора:** R_2 **Внутренний радиус тора:** R_1

ПАРАБОЛОИД	3D иллюстрация:
Объем: $$V_{\text{Параб}} = \frac{1}{2}\pi \cdot hr^2$$	
Ссылка на 3D иллюстрацию параболоиды: https://www.geogebra.org/classic/bwrvtdyf	**Радиус основания параболоиды:** r **Высота параболоиды:** h

РАЗВЕРТКИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С 3D ИЛЛЮСТРАЦИЯМИ



Шар + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/jh7znz9w
Шаровой сегмент + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/gqbanxpc
Шаровой сектор + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/hxzyxhfj
Шаровой пояс + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/uqkkbdpx
Цилиндр + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/vn9fd7qc



Усеченный цилиндр + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/q7ezebtj
Конус + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/rjvcbqyg
Усеченный конус + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/ydp7yfyv
Эллипсоид + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/zugt9eyt
Тор + Развертка	**CC3D:** https://www.geogebra.org/classic/qqymmjrb

4.4 КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

№	Описание комбинации тел	3D иллюстрация	QR-Code
1	***Шар вписан в призму***, если он касается всех граней призмы. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/tqmnk4g8	O	
2	***Шар описан около призмы***, если все вершины призмы лежат на поверхности шара. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/gebzfgzf	O	
3	***Шар вписан в пирамиду***, если он касается всех граней пирамиды. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/vpbw7shk	O	
4	***Шар описан около пирамиды***, если все вершины пирамиды лежат на поверхности шара. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/pw52san8	O	

5	***Цилиндр вписан в прямую призму***, если основания цилиндра вписаны в основания призмы. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ce4xed5k	O', O	
6	***Цилиндр описан около прямой призмы***, если его основания описаны около основания призмы. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/us9a4qa5	O', O	
7	***Цилиндр вписан в пирамиду***, если одно из его оснований принадлежит основания пирамиды, а другое его основание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/yz7wbjzq	O', O	
8	***Цилиндр описан около пирамиды***, если основание пирамиды вписано в одно из оснований цилиндра, а вершина пирамиды принадлежит другому основанию цилиндра. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/esqn9kjp	O', O	

9	***Конус вписан в призму***, если основание конуса вписано в одно из оснований призмы, а вершина конуса принадлежит другому основанию призмы. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/sxqpxwux	O', O	
10	***Конус описан около призмы***, если вершины одного из оснований призмы лежат на поверхности конуса, а все вершины другого основания призмы принадлежат основанию конуса. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/eegr7zjp	O', O	
11	***Конус вписан в пирамиду***, если основание конуса вписано в основание пирамиды, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/jkhbd9yv	O', O	
12	***Конус описан около пирамиды***, если основание конуса описано около основания пирамиды, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ayxyakrz	O', O	

13	***Сфера вписана в конус***, если сфера касается плоскости основания конуса, а каждая из образующих конуса является касательной к сфере. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/z5jmbzsh		
14	***Конус вписан в сферу***, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара, т.е. на сфере. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/pbfwgyhy		
15	***Сфера вписана в цилиндр***, если она касается оснований цилиндра и каждой его образующей. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/fsywfmhw		
16	***Цилиндр вписан в сферу***, если окружности его оснований лежат на поверхности шара, т.е. сферы. Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/w6h8bsnw		

17	***Конус вписан в цилиндр***, если основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина совпадает с центром другого основания цилиндра.		
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/txjtqvft		
18	***Цилиндр вписан в конус***, если одно основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания на боковой поверхности конуса.		
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/jn2sbugc		

Раздел – V. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

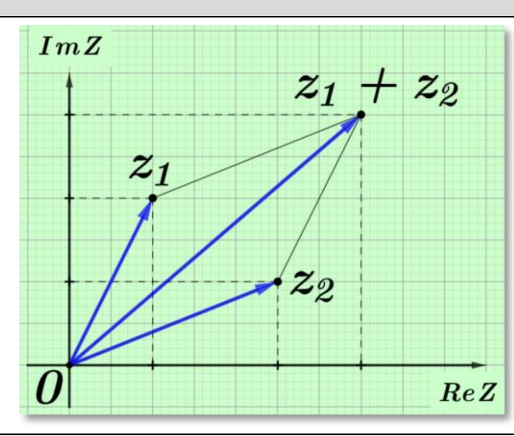
5.1 ДЕЙСТВИЕ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

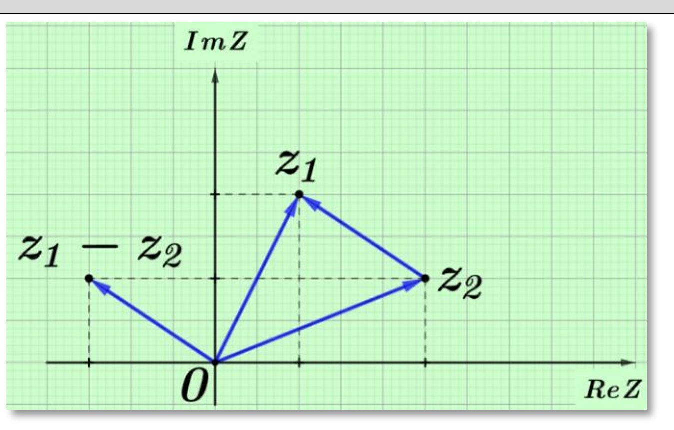
1	**Комплексные числа:**
	$z_1 = a + bi$ и $z_2 = c - di$
2	**Сложение комплексных чисел:**
	$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c - di) = (a + c) + (b - d)i$
3	**Вычитание комплексных чисел:**
	$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c - di) = (a - c) + (b + d)i$
4	**Умножение комплексных чисел:**
	$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c - di) = (ac + bd) + (bc - ad)i$
5	**Деление комплексных чисел:**
	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c - di)} = \frac{(a + bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \frac{(ac - bd) + (bc + ad)i}{c^2 + d^2}$
6	**Сопряженное комплексное число $\bar{z}$:**
	$z_1 = a + bi \quad \Rightarrow \quad \overline{z_1} = a - bi$ $z_2 = \mathrm{c} - di \quad \Rightarrow \quad \overline{z_2} = c + di$

5.2 АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Алгебраическая форма записи комплексного числа:	**Геометрическая интерпретация комплексного числа:**
$z = x + yi,$ где: $Re\,Z = x -$ действительная часть комплексного числа z, $Im\,Z = y -$ мнимая часть комплексного числа z, $i -$ мнимая единица комплексного числа z.	

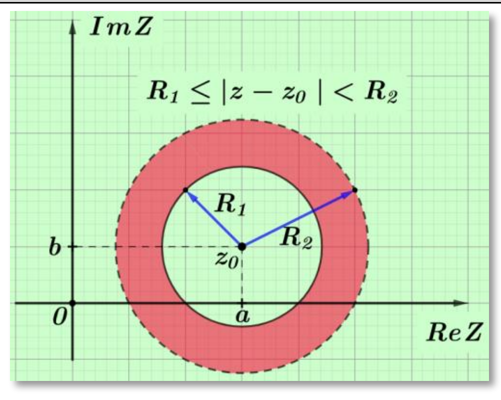
Геометрическая интерпретация: $(z_1 + z_2)$ и $(z_1 - z_2)$

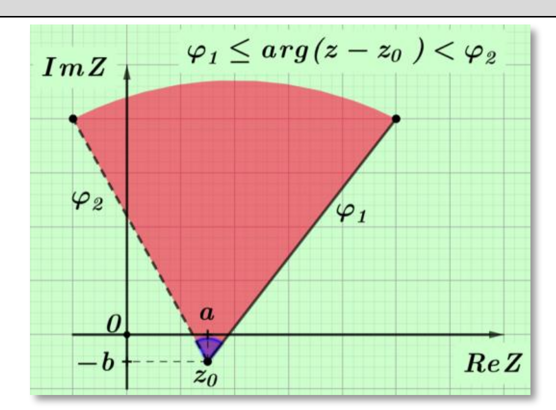




Геометрическая интерпретация: $R_1 \le \lvert z - z_0 \rvert < R_2$	Геометрическая интерпретация: $\varphi_1 < \arg(z - z_0) \le \varphi_2$







1	**Модуль комплексного числа $\lvert z \rvert$:** $$\lvert z \rvert = \lvert x + yi \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$$
2	**Аргумент комплексного числа $\arg z$:** $$\varphi = \arg z = \arctan \frac{b}{a}$$
3	**Сопряженное комплексное число $\bar{z}$:** $$z = x \pm yi \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = x \mp yi$$
4	**Произведение сопряженных комплексных чисел:** $$z \cdot \bar{z} = (x \pm yi)(x \mp yi) = x^2 + y^2 = \lvert z \rvert^2$$
5	**Извлечение квадратного корня из комплексного числа, при $b \neq 0$:** №1. $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \frac{b}{\lvert b \rvert} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$ №2. $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ №3. $\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \sqrt{\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right)$, где $\rho = \lvert z \rvert$

5.3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где:

Действительная часть:

$$a = r\cos\varphi$$

Мнимая часть:

$$b = r\sin\varphi$$

Модуль комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент комплексного числа:

$$\varphi = \arg z = \arctan\frac{b}{a}$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа:

Главное значение аргумента:

Свойства аргумента комплексного числа:

1) $\arg(z_1 z_2 \dots z_n) =$
$= \arg(z_1) + \arg(z_2) + \dots + \arg(z_n) =$
$= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$

2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$

3) $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) = n\varphi$

4) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) = -\varphi$

1	**Комплексные числа в тригонометрической форме:** $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ **Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме:** $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ **Деление комплексных чисел в тригонометрической форме:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
2	**Формула Муавра, при $n \in N$:** $z^n = (a + bi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

3

Извлечение корня из степени комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a+bi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k \in Z,$$

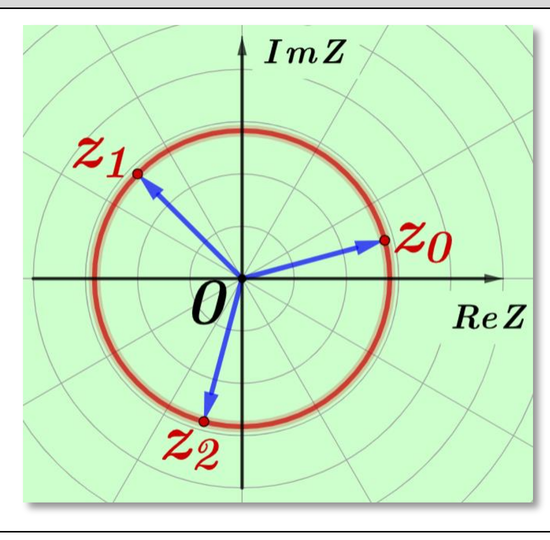
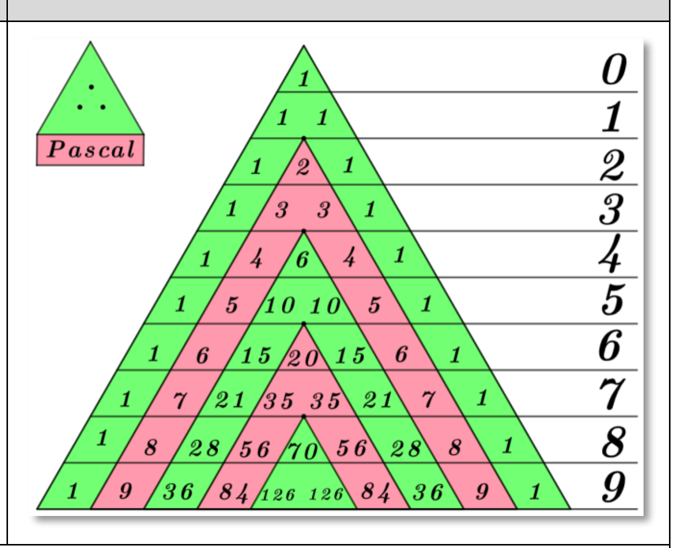
где:

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ — модуль комплексного числа,

$\varphi = \arg z = \arctan\frac{b}{a}$ — аргумент комплексного числа,

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ — определяет количество корней $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$.

Ссылка на 2D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/tmkaskac

Геометрическая интерпретация КЧ в тригонометрической форме:	**Пирамида Паскаля для бинома Ньютона:**
	

4

Применение формулы Муавра через бином Ньютона:

1) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) =$

$= \cos^n\varphi + iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + i^2C_n^2\cos^{n-2}\varphi\ \sin^2\varphi + \ \dots + i^kC_n^k\cos^{n-k}\varphi\ \sin^k\varphi + \ \dots$

$+ i^n\sin^n\varphi$

Выражение кратных углов синуса и косинуса, аргумента $n\varphi$:

2) $\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\ \sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\ \sin^4\varphi - \dots$

3) $\sin(n\varphi) = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\ \sin^3\varphi + \dots$

Раздел – VI. ТРИГОНОМЕТРИЯ

6.1 ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

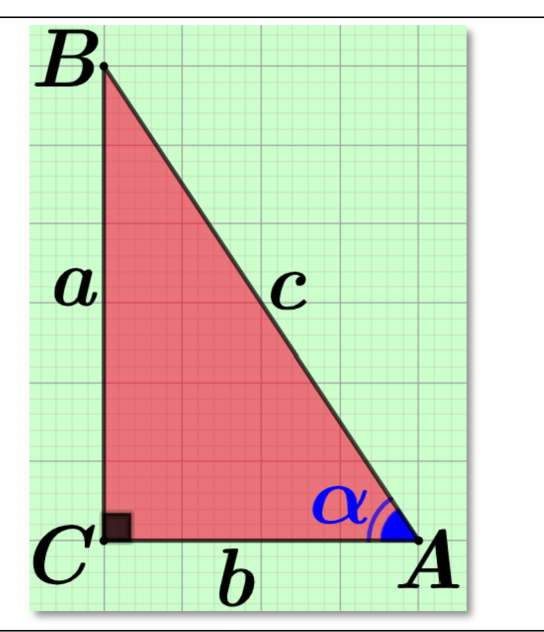
1

Тригонометрические функции острого угла:

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; 2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;

3) $\tan\alpha = \frac{a}{b}$; 4) $\cot\alpha = \frac{b}{a}$;

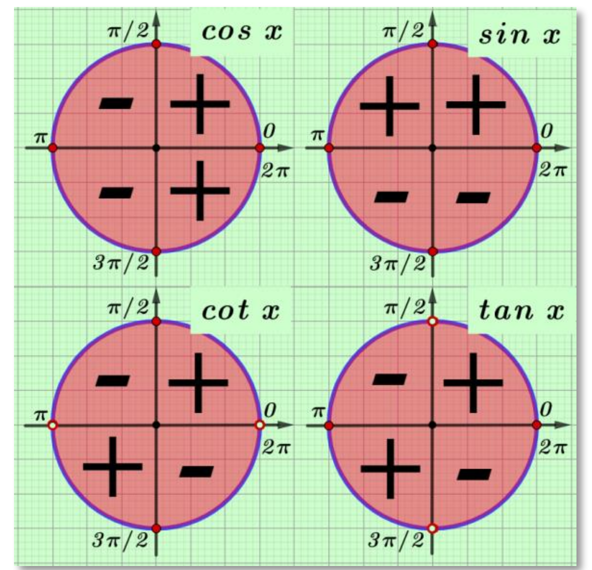
5) $\sec\alpha = \frac{c}{b}$; 6) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$.



2

Знаки значения тригонометрических функций:

Четверть	sin x	cos x	tan x	cot x
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-



4

Основные тождества:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; 2) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$;

3) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$; 4) $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$;

5) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$; 6) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$;

7) $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$; 8) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$.

5

Формулы приведения:

$\boldsymbol{\alpha}$ (рад)	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
$\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$
$\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$

6

Периодичность:

1) $\cos(t+2\pi)=\cos t\,, T_{cos}=2\pi;$
2) $\sin(t+2\pi)=\sin t\,, T_{sin}=2\pi;$
3) $\tan(t+\pi)=\tan t\,, T_{tan}=\pi;$
4) $\cot(t+\pi)=\cot t\,, T_{cot}=\pi.$

Четность и нечетность:

1) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha\,;$
2) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\,;$
3) $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\,;$
4) $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha.$

7

Произведение тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$

2) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$

3) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$

8

Формулы сложения и вычисления аргументов:

1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\,;$
2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\,;$
3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta};$
4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}.$

9

Сумма и разность тригонометрических функций:

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$

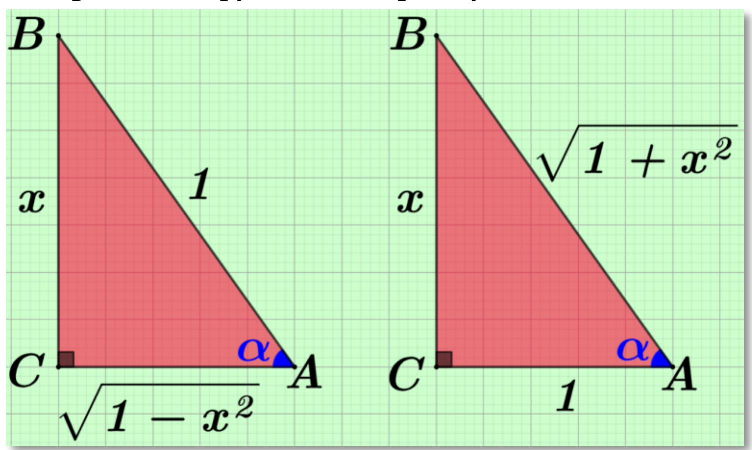
5) $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$

	6) $\cot\alpha \pm \cot\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$; 7) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$; 8) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.
10	**Произведение тригонометрических функций:**
	1) $\tan\alpha\tan\beta = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta}$; 2) $\cot\alpha\tan\beta = \dfrac{\cot\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha + \cot\beta}$; 3) $\cot\alpha\cot\beta = \dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$.
11	**Формулы кратных углов:**
	1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$; 3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$; 4) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = \dfrac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$; 5) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 6) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 7) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$; 8) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$; 9) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; 10) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; 11) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; 12) $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; 13) $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$;

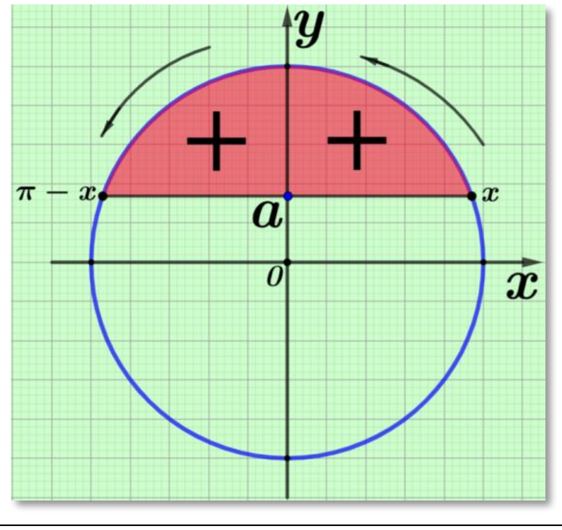
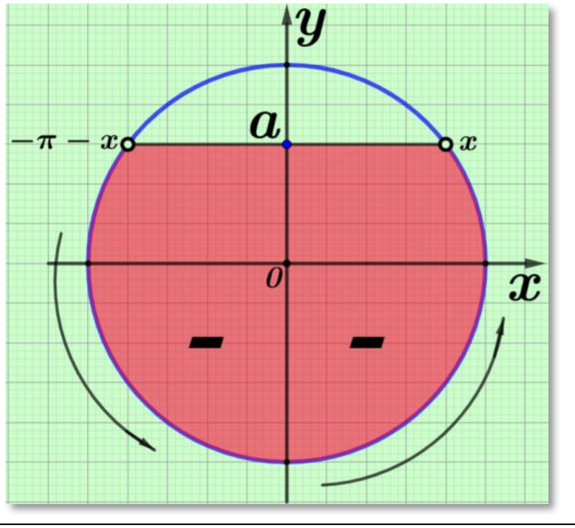
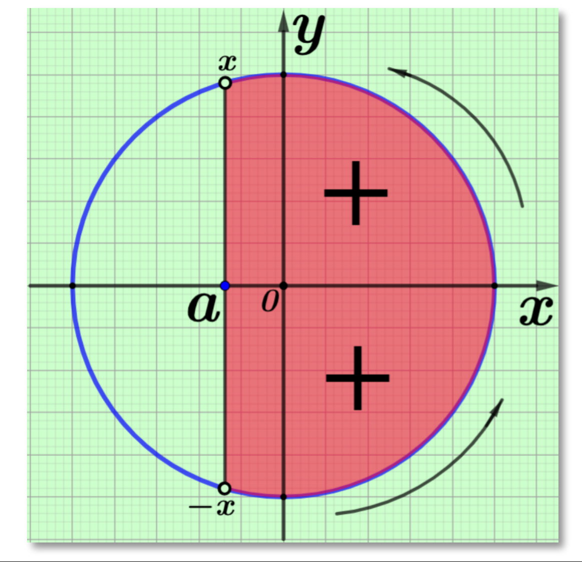
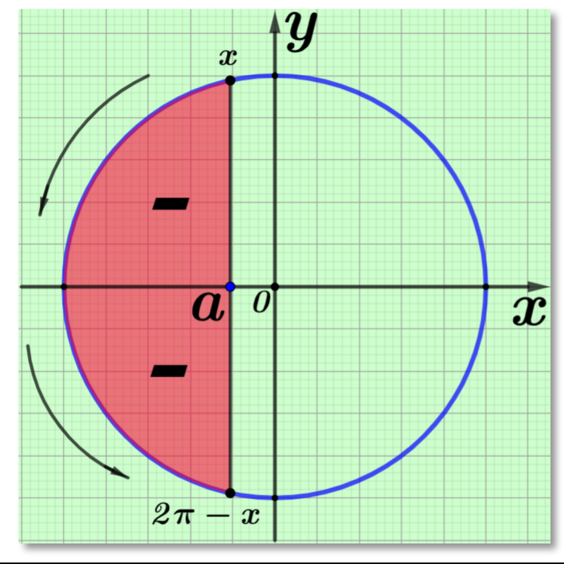
	14) $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$; 15) $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha}$; 16) $\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha$; 17) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.
12	**Понижение степенных тригонометрических функций:**
	1) $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$; 2) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; 3) $\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$; 4) $\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha - 3\cos\alpha)$.
13	**Формулы дополнительных аргументов:**
	$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha)$, где: $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right., \quad a^2+b^2 \neq 0.$

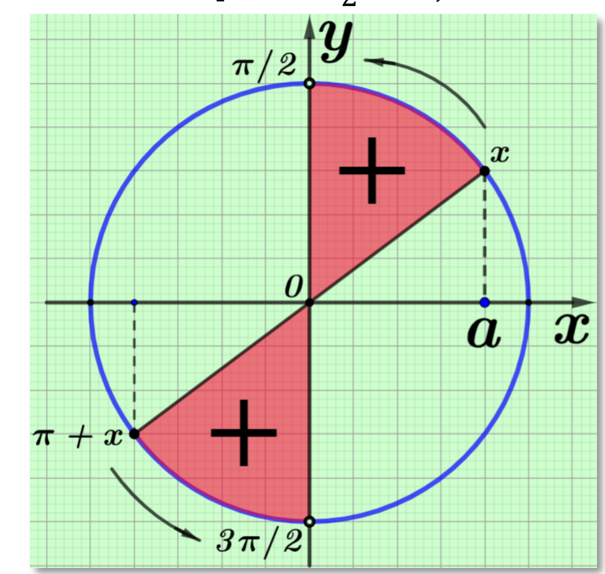
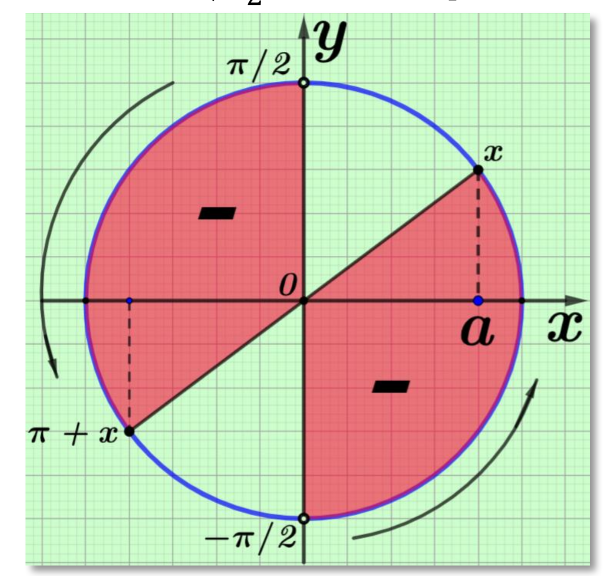
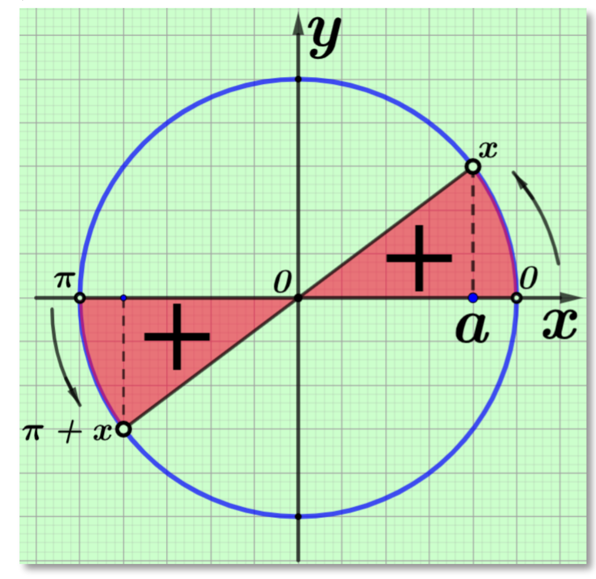
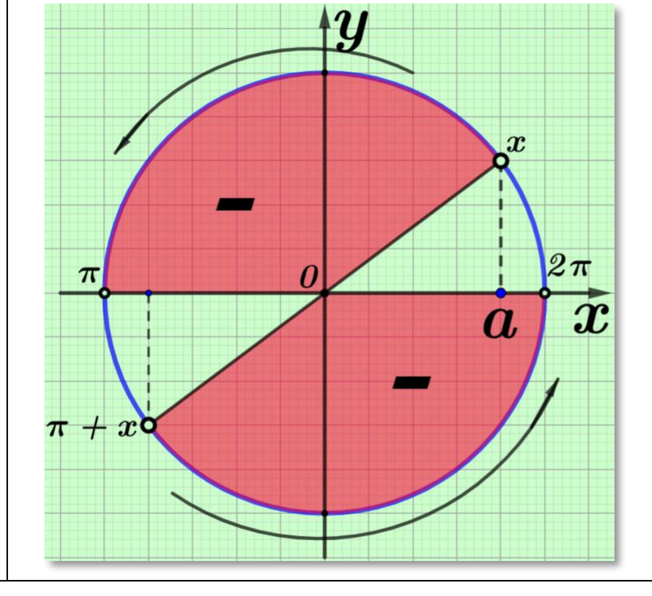
6.2 ФОРМУЛЫ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1	**Свойства обратных тригонометрических функций:**
	1) $y = \arcsin x \quad \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$ 2) $y = \arccos x \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \arccos x \le \pi \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$ 3) $y = \arctan x \quad \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2} \\ -\infty < x < \infty \end{cases}$ 4) $y = \operatorname{arccot} x \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{arccot} x < \pi \\ -\infty < x < \infty \end{cases}$
2	**Соотношение между обратной тригонометрической функцией:**
	1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x = -\frac{\pi}{2} + \arccos x$; 2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$;

	3) $\arctan(-x) = -\arctan x = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccot} x$; 4) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} + \arctan x$.
3	**Обратные тригонометрические функции острого угла:** 
4	**Формулы обратных тригонометрических функций:**
	1) $\sin(\arcsin x) = x$; 2) $\cos(\arccos x) = x$; 3) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; 4) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$; 5) $\tan(\arctan x) = x$; 6) $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$; 7) $\tan(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x}$; 8) $\cot(\arctan x) = \frac{1}{x}$; 9) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 10) $\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 11) $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 12) $\cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 13) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 15) $\cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; 16) $\cot(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 17) $\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, & x \geq 0 \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, & x < 0 \end{cases}$; 18) $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & x \geq 0 \\ -\arcsin\sqrt{1-x^2}, & x < 0 \end{cases}$ 19) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 20) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$; 21) $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$.

6.3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

<table>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Тригонометрические уравнения:</td><td>Частные случаи:</td></tr>
<tr><td>
1) $\sin x = a, (|a| \le 1)$
$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z}$
2) $\cos x = a, (|a| \le 1)$
$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z}$
3) $\tan x = a$
$\boxed{x = \arctan a + \pi k, k \in Z}$
4) $\cot x = a$
$\boxed{x = \operatorname{arccot} a + \pi k, k \in Z}$
</td><td>
$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in Z$
$\sin x = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$
$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in Z$
$\tan x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in Z$
$\cot x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td colspan="2">Простейшие тригонометрические неравенства:</td></tr>
<tr><td>1) $\sin x \ge a$: $[x + 2\pi k; \pi - x + 2\pi k], k \in Z$

</td><td>2) $\sin x < a$: $(-\pi - x + 2\pi k; x + 2\pi k), k \in Z$

</td></tr>
<tr><td>3) $\cos x > a$: $(-x + 2\pi k; x + 2\pi k), k \in Z$

</td><td>4) $\cos x \le a$: $[x + 2\pi k; 2\pi - x + 2\pi k], k \in Z$

</td></tr>
</table>

5) $\tan x \geq a$: $\left[x + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$ 	6) $\tan x \leq a$: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; x + \pi k\right], k \in Z$ 
7) $\cot x > a$: $(\pi k; x + \pi k), k \in Z$ 	8) $\cot x < a$: $(x + \pi k; \pi + \pi k), k \in Z$ 

Раздел – VII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

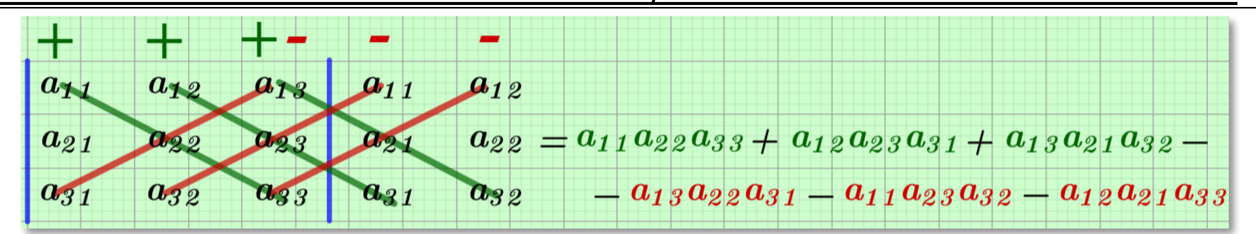
7.1 МАТРИЦЫ

1	**Матрицы:**
	$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}\\d_{21}&d_{22}&d_{23}\end{pmatrix}$
2	**Основные свойства матриц:**
	1) $AB\neq BA$; 2) $A(BC)=(AB)C$; 3) $A(B+C)=AB+BC$; 4) $(A+B)C=AC+BC$; 5) $(AB)^T=B^TA^T$; 6) $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$; 7) $A^n=\underbrace{AAA\ldots A}_{n\ \text{раз}}$; 8) $A^0=E$; 9) $(\lambda A)^n=\lambda^nA^n$; 10) $\lvert A^n\rvert=\lvert A\rvert^n$.
3	**Единичная матрица:**
	Все диагональные элементы равны 1: $E=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$
4	**Сложение и разность матриц:**
	$A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&a_{13}\pm b_{13}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&a_{23}\pm b_{23}\\a_{31}\pm b_{31}&a_{32}\pm b_{32}&a_{33}\pm b_{33}\end{pmatrix}$
5	**Умножение матрицы на число:**
	$\lambda A=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\lambda a_{23}\\\lambda a_{31}&\lambda a_{32}&\lambda a_{33}\end{pmatrix}$
6	**Умножение матриц:**
	$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}=$

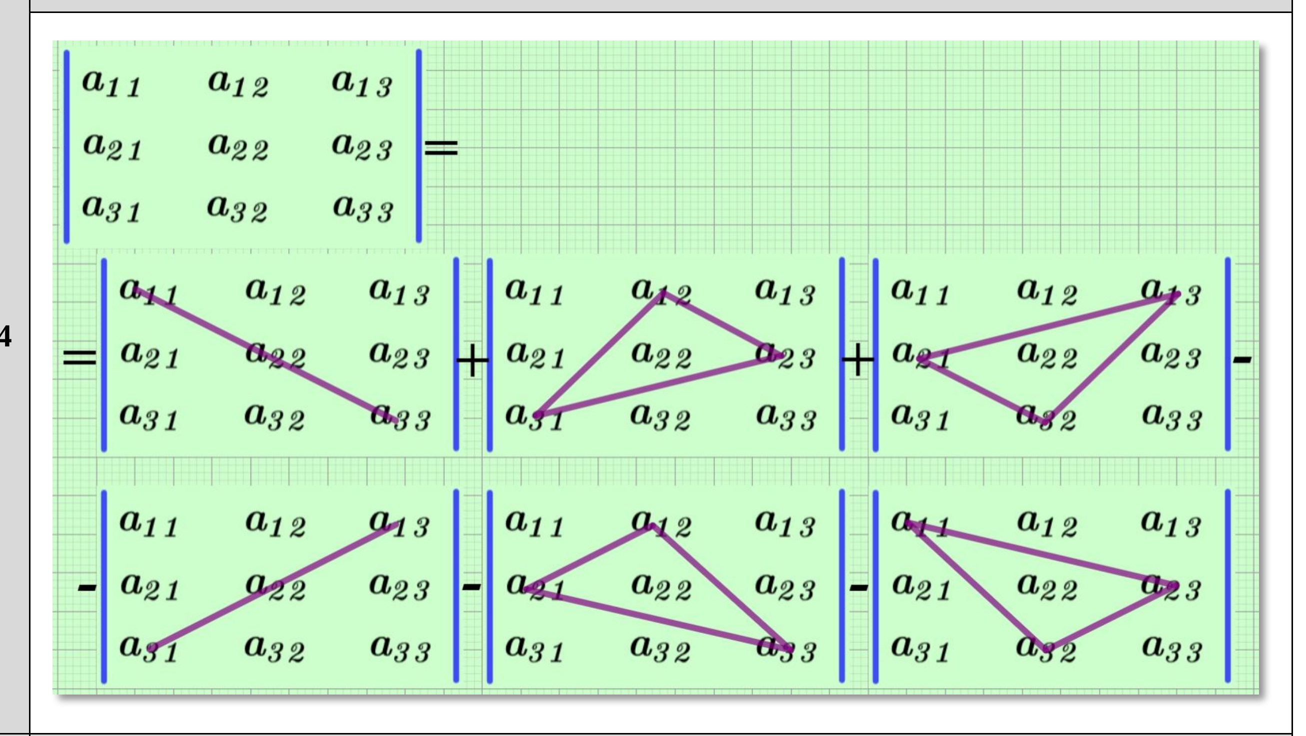
	$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$
	$c_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$ $c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$ $c_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}$
7	**Транспонирование матрицы:**
	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{pmatrix}$
8	**Обратная матрица:**
	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\lvert A \rvert} = \frac{1}{\lvert A \rvert} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \left(A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}\right)$ где: M_{ij} − минор элемента a_{ij}, $\tilde{A}$ − союзная матрица матрицы A.

7.2 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1	**Определитель I-го порядка:**
	$\Delta = \lvert A \rvert = \lvert a_{11} \rvert = a_{11}$
2	**Определитель II-го порядка:**
	$\Delta = \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
3	**Определитель III-го порядка:**
	$\Delta = \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$



4 **Правило Саррюса:**



5 **Разложение определителя по строке и столбцу:**

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

M_{11} M_{12} M_{13}

Миноры: M_{11}, M_{12}, M_{13}

6 **Определитель *n*-го порядка:**

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\,, \quad \left(A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}\right)$$

где: M_{ij} − минор элемента a_{ij}

7

Правило Крамера:

$$\text{СЛУ: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Корни системы линейных уравнений (СЛУ):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Раздел – VIII. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

8.1 ТОЧКА НА ПЛОСКОСТИ. ДЕЙСТВИЕ НАД ВЕКТОРАМИ

№	Точка на плоскости:	2D иллюстрация
1	**Расстояние от точки до начала координат (радиус вектор):** **Точки на плоскости:** $O(0,0), F(x,y)$ **Координаты вектора** $\overrightarrow{OF}$**:** $\overrightarrow{OF}=(x,y)$ **Расстояние от точки до начала координат:** $d=\lvert\overrightarrow{OF}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	
2	**Расстояние между двумя точками:** **Точки на плоскости:** $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ **Координаты вектора** $\overrightarrow{AB}$**:** $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ **Расстояние между двумя точками** $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$**:** $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	
3	**Координаты середины отрезка:** **Точки на плоскости:** $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ **Координаты середины отрезка** $C(x,y)$**:** $C(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$	

4

Деление отрезка в заданном отношении:

Точки на плоскости:

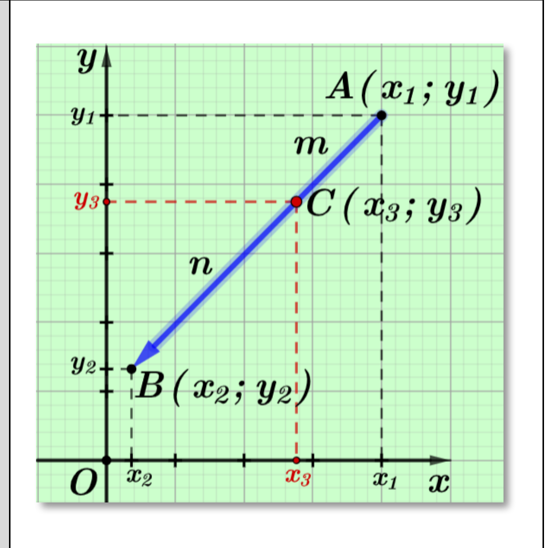
$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

Деление отрезка в заданном отношении $\frac{m}{n} = \lambda$**:**

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad AC = CB \cdot \lambda$$

Координаты точки $C(x_3, y_3)$**:**

$$C(x_3, y_3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$



5

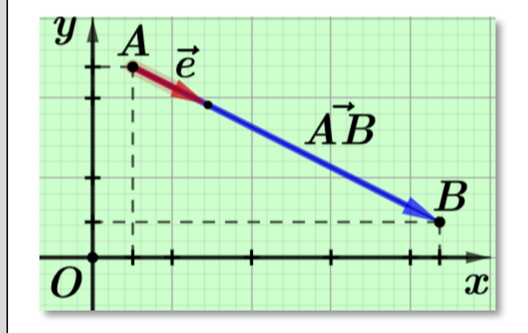
Единичный вектор:

Координаты вектора на плоскости:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y)$$

Единичный вектор (орт вектор):

$$\vec{e}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \frac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right)$$



6

Действие над векторами:

Векторы на плоскости:

$$\vec{a}(x_a, y_a), \vec{b}(x_b, y_b), \vec{c}(x_c, y_c)$$

Сумма и разность векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b, y_a - y_b)$$

Умножение вектора на число:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a)$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

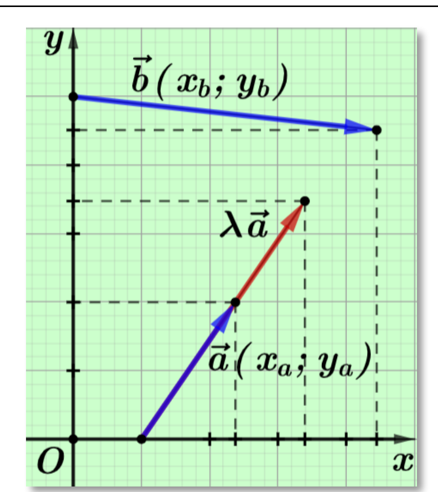
Угол между векторами:

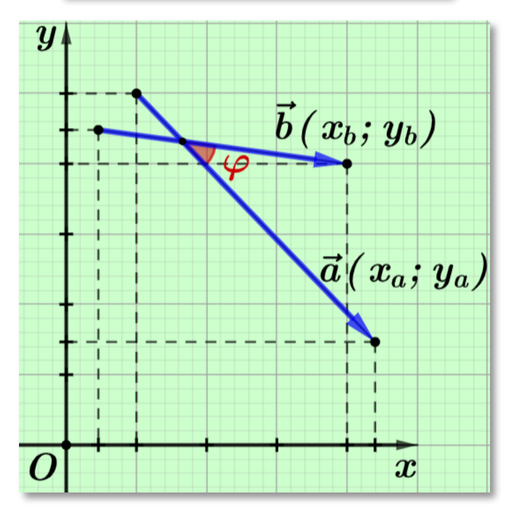
$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2} \cdot \sqrt{{x_b}^2 + {y_b}^2}}$$

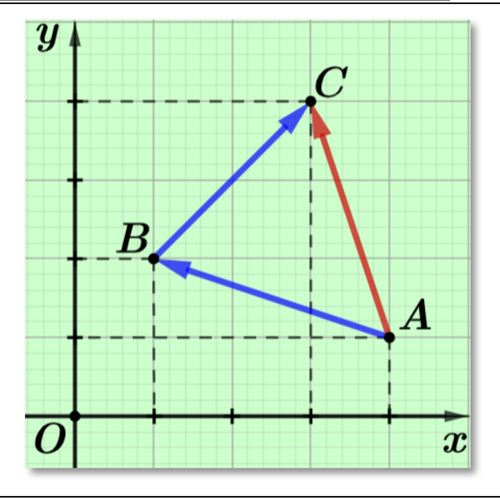
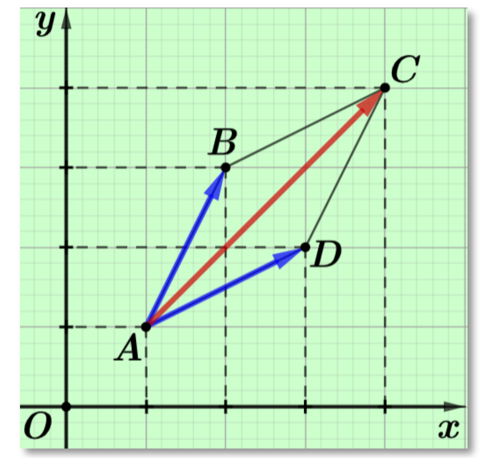
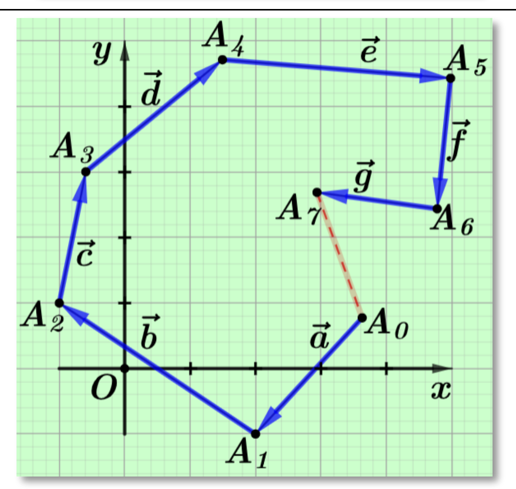
Условия параллельности и перпендикулярности векторов:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \quad x_a x_b + y_a y_b = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$$





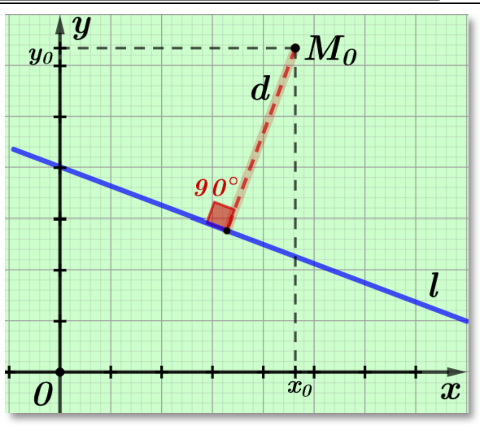
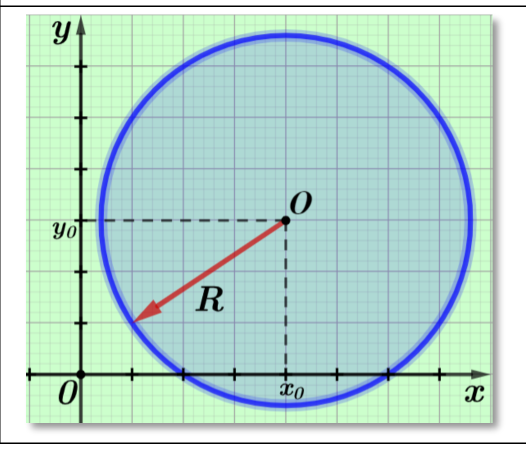
7	**Правило треугольника:** **Векторы на плоскости:** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}(x_a, y_a), \overrightarrow{BC} = \vec{b}(x_b, y_b), \overrightarrow{AC} = \vec{c}(x_c, y_c)$ **Правило треугольника:** 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$	
8	**Правило параллелограмма:** **Векторы на плоскости:** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}(x_a, y_a), \overrightarrow{AD} = \vec{b}(x_b, y_b), \overrightarrow{AC} = \vec{c}(x_c, y_c)$ **Правило параллелограмма:** 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ 2) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$	
9	**Правило многоугольника:** **Векторы на плоскости:** $\vec{a}(x_a, y_a), \vec{b}(x_b, y_b), \vec{c}(x_c, y_c), \vec{d}(x_d, y_d), \ldots, \vec{n}(x_n, y_n)$ **Правило многоугольника:** $\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_0A_n}$	

8.2 ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

№	Прямая на плоскости:	2D иллюстрация
1	**Уравнение прямой:** **Общий вид:** $$Ax + By + C = 0$$ **Угловой коэффициент:** $$k = -\frac{A}{B} = \tan\varphi$$ **Направляющий вектор и вектор нормали:** $$\vec{q}\,(-B, A) \quad \text{и} \quad \vec{n}\,(A, B)$$ **С угловым коэффициентом и начальной ординатой:** $$y = kx + b$$ **В отрезках на осях:** $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$	
2	**Две прямые:** **Уравнения прямых в общем виде:** $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$ **Угол между двумя данными прямыми:** $$\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$ **Координаты точки пересечения двух прямых:** $$l_1 \cap l_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{C_1B_2 - C_2B_1}{B_1A_2 - A_1B_2} \\ y = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{B_1A_2 - A_1B_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M(x; y)$$ **Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых:** $$l_1 \perp l_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$ $$l_1 \parallel l_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$	

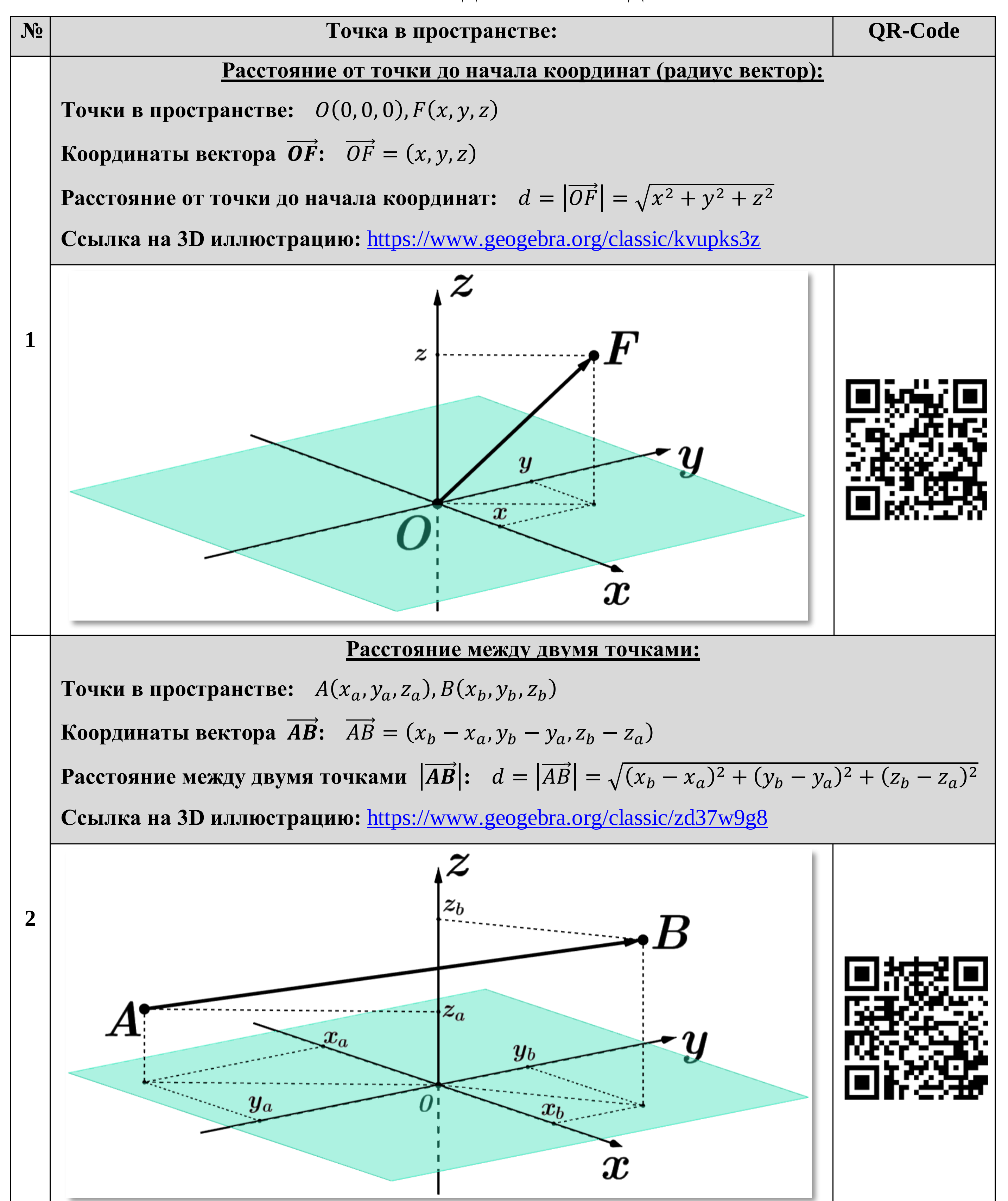
8.3 ПРЯМАЯ И ТОЧКА НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

№	Прямая и точка на плоскости:	2D иллюстрация
1	**Направляющий вектор:** **Начальная и произвольная точки на прямой l:** $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ **Направляющий вектор прямой l:** $\vec{q}\ (\alpha, \beta)$ $\boldsymbol{M(x,y) \in l \ \Rightarrow \ \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{q}}$: $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$	
2	**Уравнение прямой, проходящий через две данные точки:** **Точки на плоскости:** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ **Уравнение прямой:** $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ **Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой:** $\dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$	
3	**Вектор нормали:** **Уравнение прямой:** $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ **Вектор нормали:** $\vec{n}\ (a, b)$	
4	**Угол между двумя прямыми:** **Уравнения двух прямых:** $\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0 \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) = 0 \end{cases}$ **Угол между двумя прямыми:** $\cos\varphi = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$	

5	**<u>Расстояние от точки до прямой:</u>** **Уравнение прямой:** $ax + by + c = 0$ **Произвольная точка, не лежащая на прямой:** $M_0(x_0, y_0)$ **Расстояние от точки до прямой:** $d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	
6	**<u>Уравнение окружности:</u>** **Центр окружности лежит в начале координат:** $x^2 + y^2 = R^2$ **Центр окружности с координатами** $\boldsymbol{O(x_0, y_0)}$**:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	

Раздел – IX. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

9.1 ТОЧКА В ПРОСТРАНСТВЕ. ДЕЙСТВИЕ НАД ВЕКТОРАМИ



№	Точка в пространстве:	QR-Code
1	**Расстояние от точки до начала координат (радиус вектор):** **Точки в пространстве:** $O(0,0,0), F(x,y,z)$ **Координаты вектора $\overrightarrow{OF}$:** $\overrightarrow{OF} = (x,y,z)$ **Расстояние от точки до начала координат:** $d = \lvert\overrightarrow{OF}\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/kvupks3z	
2	**Расстояние между двумя точками:** **Точки в пространстве:** $A(x_a,y_a,z_a), B(x_b,y_b,z_b)$ **Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:** $\overrightarrow{AB} = (x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a)$ **Расстояние между двумя точками $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$:** $d = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2+(z_b-z_a)^2}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/zd37w9g8	

3

Координаты середины отрезка:

Точки в пространстве: $A(x_a, y_a, z_a), B(x_b, y_b, z_b)$

Координаты середины отрезка $C(x, y, z)$**:** $C(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{x_a + x_b}{2} \\ y = \frac{y_a + y_b}{2} \\ z = \frac{z_a + z_b}{2} \end{cases}$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/grffeuub



4

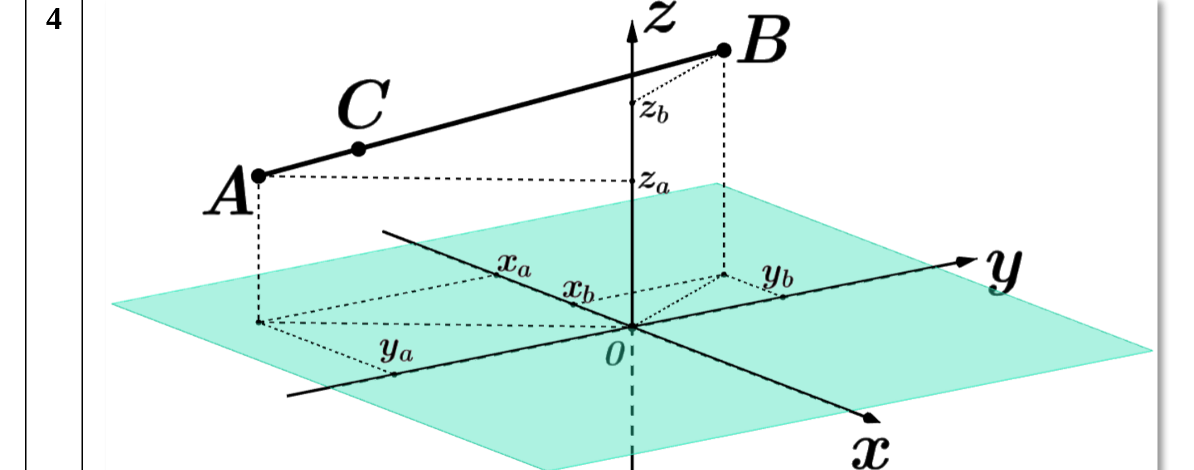
Деление отрезка в заданном отношении:

Точки в пространстве: $A(x_a, y_a, z_a), B(x_b, y_b, z_b), C(x_c, y_c, z_c)$

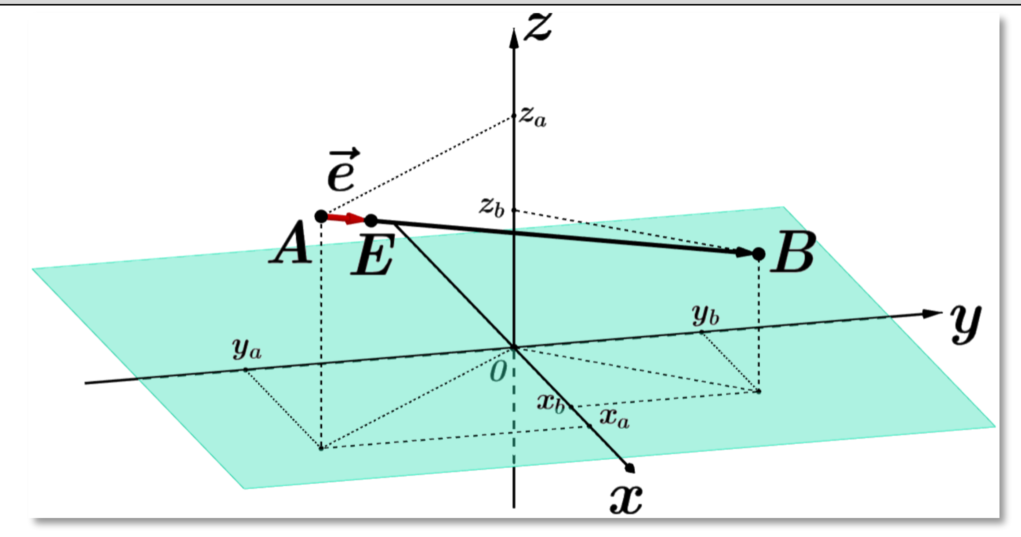
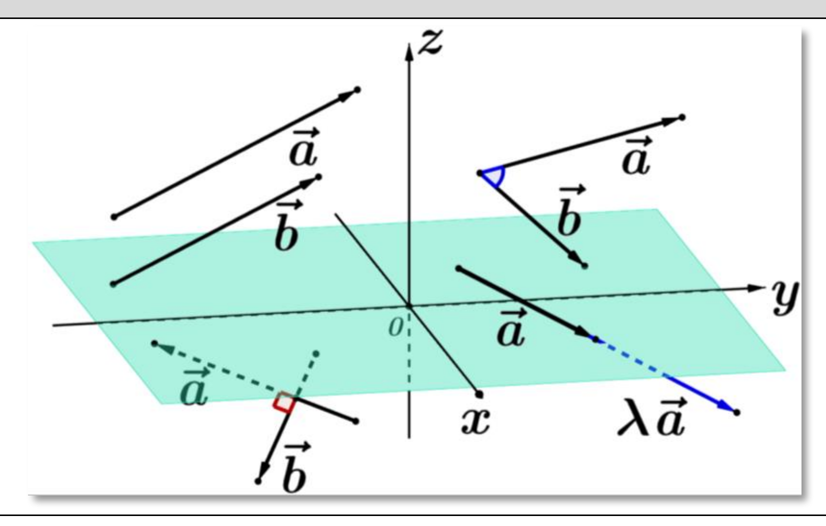
Деление отрезка в заданном отношении $\frac{m}{n} = \lambda$**:** $\frac{AC}{CB} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad AC = CB \cdot \lambda$

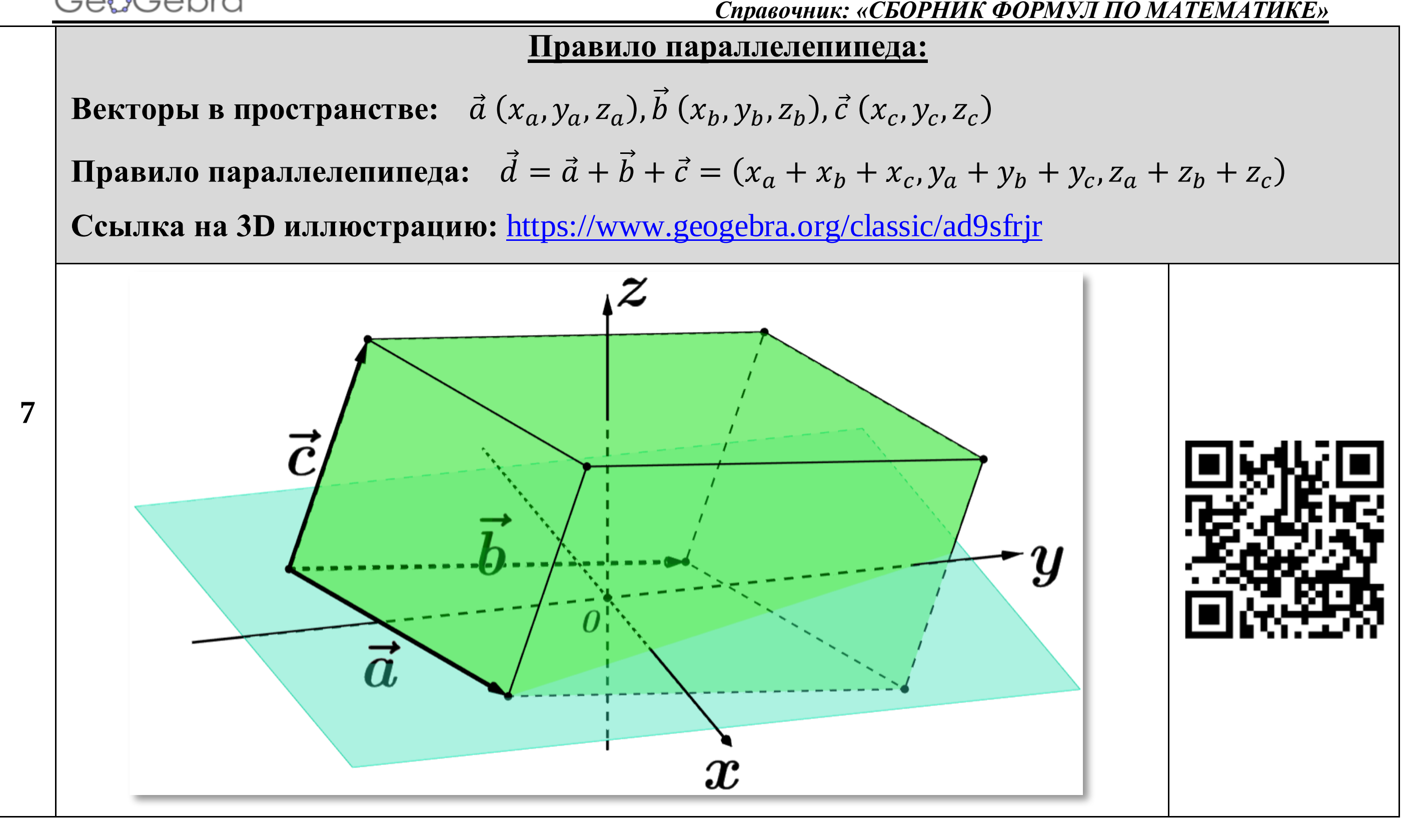
Координаты точки $C(x_c, y_c, z_c)$**:** $C(x_c, y_c, z_c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_c = \frac{x_a + \lambda x_b}{1+\lambda} \\ y_c = \frac{y_a + \lambda y_b}{1+\lambda} \\ z_c = \frac{z_a + \lambda z_b}{1+\lambda} \end{cases}$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/zjsbgdxh





5	**Единичный вектор:** **Общий вид:** $\vec{e}\,(i,j,k) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **Координаты вектора в пространстве:** $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$ **Единичный вектор:** $\vec{e}\,(\overrightarrow{AB}) = \left(\frac{x}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}, \frac{y}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}, \frac{z}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}\right)$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/vhtaekxb	
		
6	**Действие над векторами в пространстве:** **Векторы в пространстве:** $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a), \vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ **Умножение вектора на число:** $\lambda\vec{a} = (\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a)$ **Угол между векторами:** $\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$; $\sin\varphi = \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ **Условия параллельности и перпендикулярности векторов:** $\vec{a} \perp \vec{b} \;\Rightarrow\; x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0;$ $\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Rightarrow\; \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/qusrv2ea	
		

7	**<u>Правило параллелепипеда:</u>** **Векторы в пространстве:** $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a), \vec{b}\,(x_b, y_b, z_b), \vec{c}\,(x_c, y_c, z_c)$ **Правило параллелепипеда:** $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (x_a + x_b + x_c, y_a + y_b + y_c, z_a + z_b + z_c)$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/ad9sfrjr	
		

9.2 УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

№	Уравнение сферы, векторное и смешанное произведение векторов:	QR-Code
1	**<u>Уравнение сферы</u>** **Координата центра шара:** $O\,(x_0, y_0, z_0)$ **Уравнение сферы:** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/kwpfvnwz	

<table>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">

Векторное произведение векторов

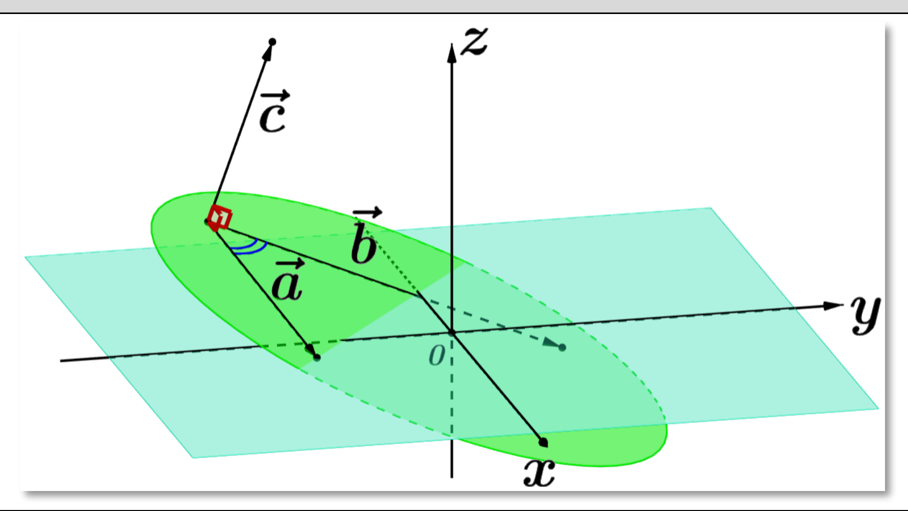
Координаты орта-вектора: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Площадь параллелограмма: $S_{\text{Паралл}} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$

Площадь треугольника: $S_{\text{Треуг}} = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/xrvdqmd4

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>



</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td colspan="2">

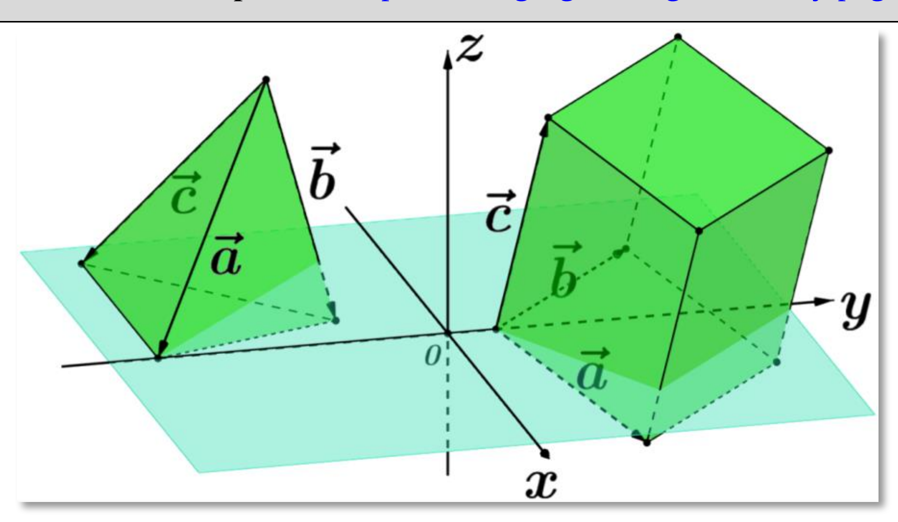
Смешанное произведение векторов

Объем параллелепипеда: $V_{\text{Параллел}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$

Объем пирамиды: $V_{\text{Пирамиды}} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/acyfpbgr

</td></tr>
<tr><td>

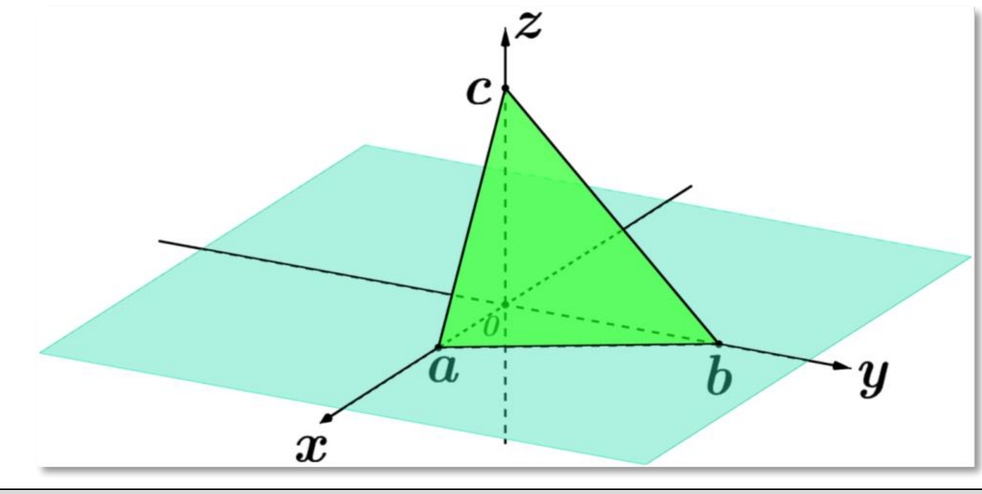
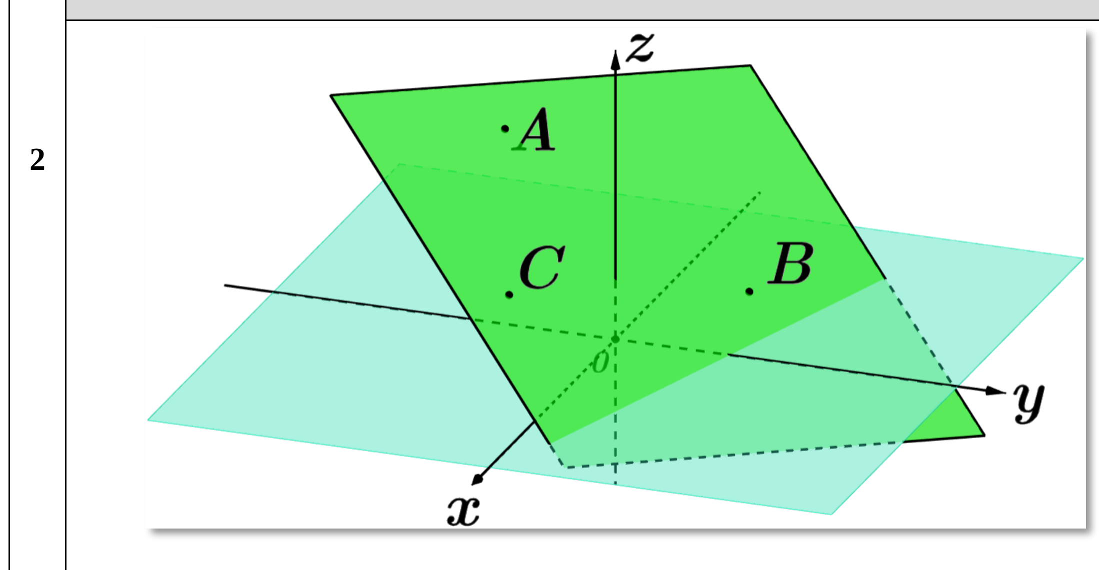


</td><td>



</td></tr>
</table>

9.3 ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

№	Плоскость в пространстве:	QR-Code
1	**Уравнение плоскости в отрезках** **Уравнение плоскости общего вида:** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ **Уравнение плоскости в отрезках:** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$ где: a, b, c − координаты точек отсекаемых на осях OX, OY, OZ соответственно. **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/tbebefjx	
		
2	**Уравнение плоскости, проходящей через три точки** **Точки в пространстве:** $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ **Уравнение плоскости через три точки:** $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/shjntevm	
		

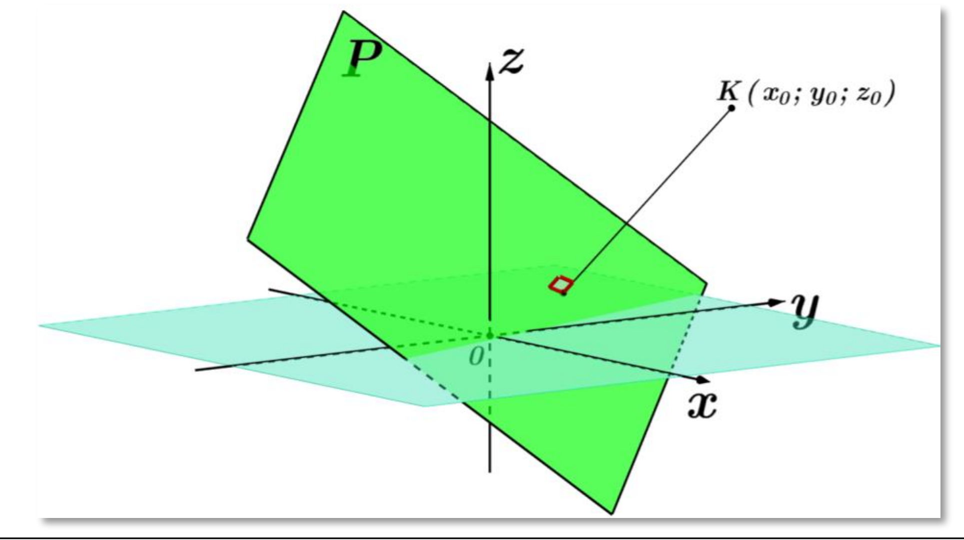
3

Расстояние от точки до плоскости

Произвольная точка, не лежащая на плоскости: $K\ (x_0, y_0, z_0)$

Расстояние от точки до плоскости: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/ymfwsdus





4

Угол между двумя плоскостями

Уравнения плоскостей: $\begin{cases} P_1: & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2: & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

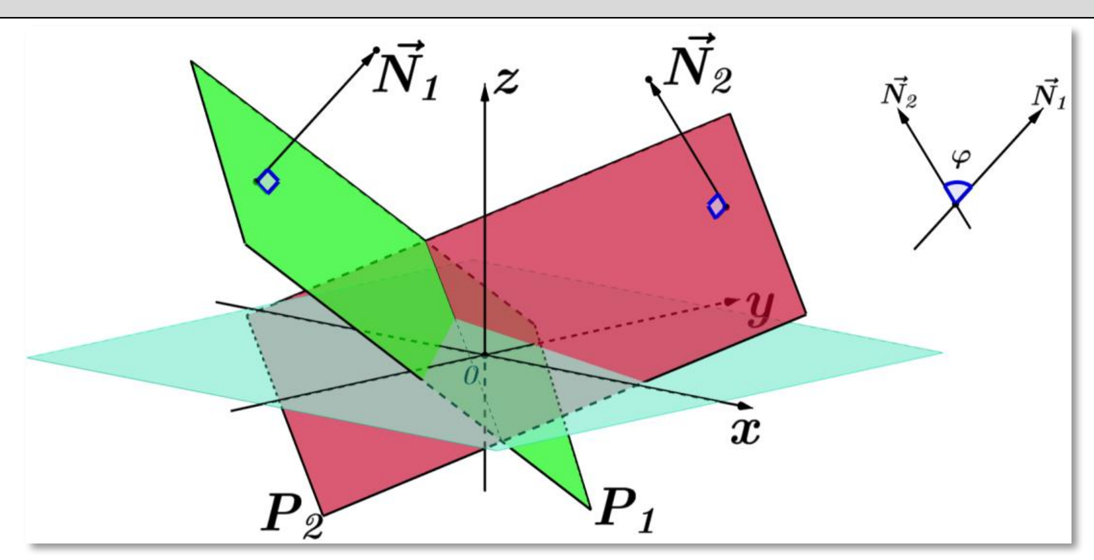
Вектора нормали: $\overrightarrow{N_1}\ (A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}\ (A_2; B_2; C_2)$

Угол между двумя плоскостями: $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}|}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей:

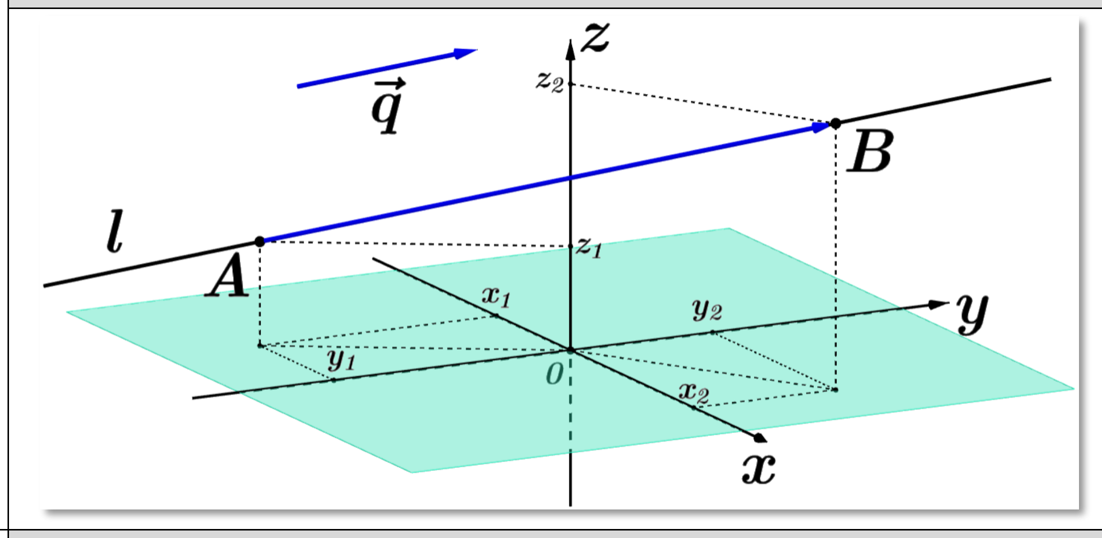
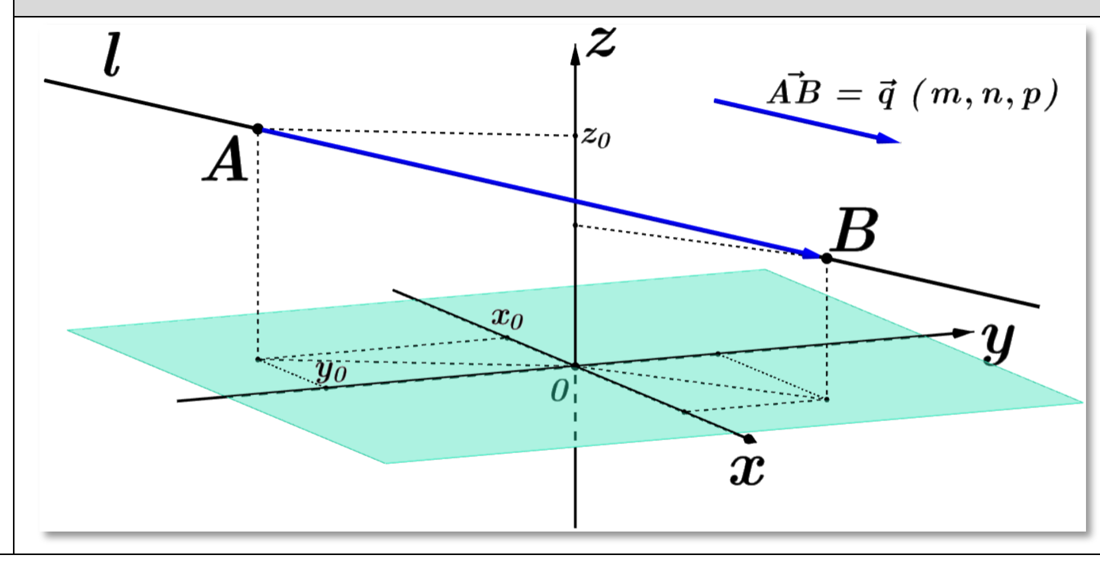
$$P_1 \parallel P_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad P_1 \perp P_2 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

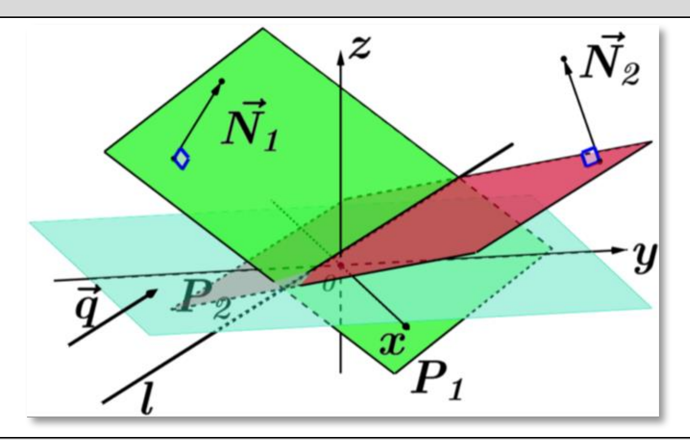
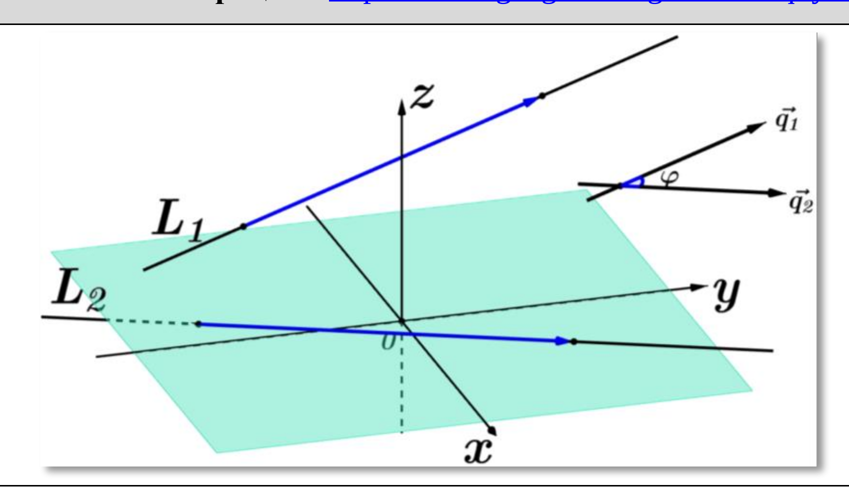
Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/bjenvjyb





9.4 ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

№	Прямая в пространстве:	QR-Code
1	**Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки** **Точки в пространстве:** $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ **Направляющий вектор:** $\vec{q}\ (m, n, p)$ **Уравнение прямой через две заданные точки:** $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/zbcatkxr	
	 	
2	**Параметрическое уравнение прямой** **Точка в пространстве:** $A(x_0, y_0, z_0)$ **Направляющий вектор:** $\vec{q}\ (m, n, p)$ **Параметрическое уравнение прямой:** $L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/hcft2x9j	
	 	

3	**Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей** **Уравнения плоскостей:** $\begin{bmatrix} P_1: & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2: & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{bmatrix}$ **Вектора нормали:** $\overrightarrow{N_1}\,(A_1; B_1; C_1)$ и $\overrightarrow{N_2}\,(A_2; B_2; C_2)$ **Направляющий вектор:** $\vec{q}\,(m, n, p)$ **Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей:** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{q} \perp \overrightarrow{N_1} \\ \vec{q} \perp \overrightarrow{N_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/eedsqupy	
	 	
4	**Угол между прямыми** **Уравнения прямых:** $L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ и $L_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$ **Направляющие вектора:** $\overrightarrow{q_1}\,(m_1, n_1, p_1)$ и $\overrightarrow{q_2}\,(m_2, n_2, p_2)$ **Угол между прямыми:** $\cos\varphi = \frac{\lvert\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{q_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{q_2}\rvert} = \frac{\lvert m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}}$ **Условия параллельности и перпендикулярности прямых:** $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/cqxysksd	
	 	

5

Координаты проекции точки на прямую

Уравнение прямой: $L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$

Произвольная точка не лежащая на прямой *L*: $F(x, y, z)$

Произвольная точка лежащая на прямой *L*: $A(x_0, y_0, z_0)$

Направляющий вектор: $\vec{q}\ (m, n, p)$

Алгоритм действий для вычисления координаты проекции точки на прямую в пространстве:

Шаг–№1:

$$L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_0 + \lambda m \\ y_0 + \lambda n \\ z_0 + \lambda p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_X \\ y_X \\ z_X \end{pmatrix}$$

Шаг–№2:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{q} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{FX} = \begin{pmatrix} (x_0 + \lambda m) - x \\ (y_0 + \lambda n) - y \\ (z_0 + \lambda p) - z \end{pmatrix}$$

Шаг–№3:

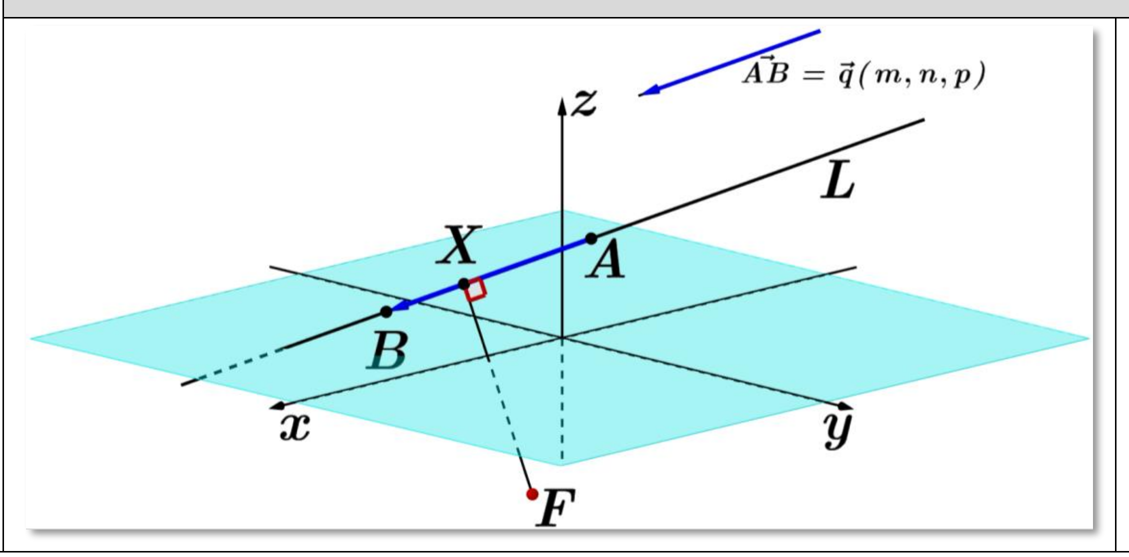
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FX} = 0 \quad \Rightarrow \quad \big((x_0 + \lambda m) - x\big)m + \big((y_0 + \lambda n) - y\big)n + \big((z_0 + \lambda p) - z\big)p = 0$$

$$\lambda = \frac{(x - x_0)m + (y - y_0)n + (z - z_0)p}{m^2 + n^2 + p^2}$$

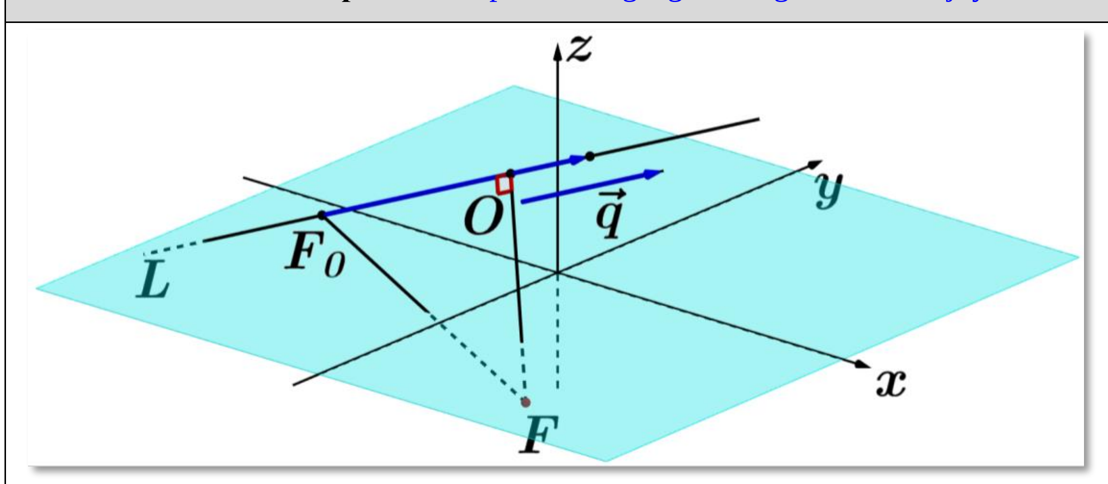
Шаг–№4:

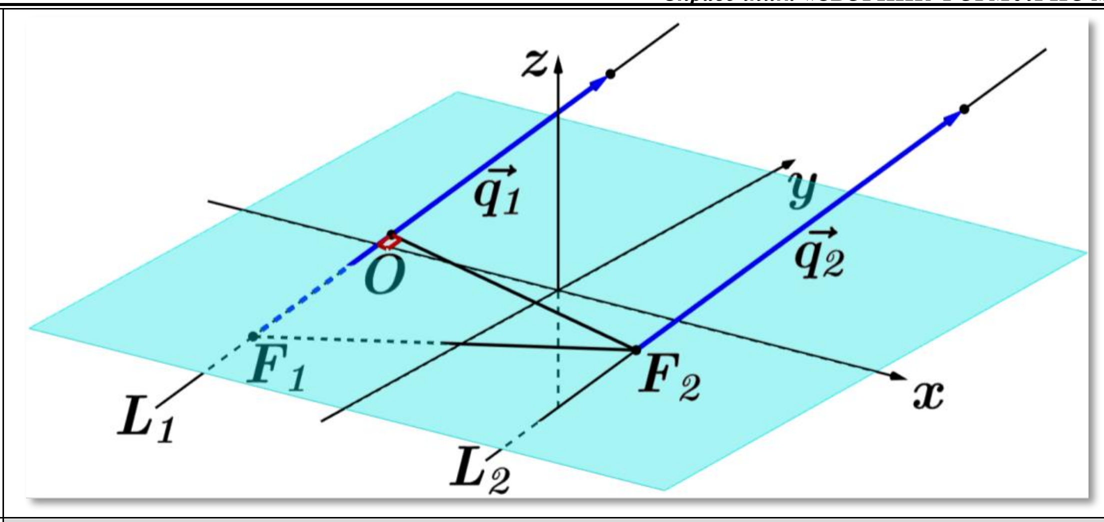
$$X = \begin{pmatrix} x_0 + \lambda m \\ y_0 + \lambda n \\ z_0 + \lambda p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_X \\ y_X \\ z_X \end{pmatrix}$$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/uqqbgp8f





6	**Расстояние от точки до прямой:** **Уравнение прямой:** $L=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}m\\n\\p\end{pmatrix}$ **Произвольная точка не лежащая на прямой** $\boldsymbol{L}$**:** $F(x,y,z)$ **Произвольная точка лежащая на прямой** $\boldsymbol{L}$**:** $F_0(x_0,y_0,z_0)$ **Направляющий вектор** $\vec{q}$ **и вектор** $\overrightarrow{F_0F}$**:** $\vec{q}\,(m,n,p)$ и $\overrightarrow{F_0F}=(x_0-x,y_0-y,z_o-z)$ **Расстояние от точки до прямой:** $d=\dfrac{\lvert\vec{q}\times\overrightarrow{F_0F}\rvert}{\lvert\vec{q}\rvert}=\dfrac{\left\lVert\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\m&n&p\\x_0-x&y_0-y&z_o-z\end{vmatrix}\right\rVert}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/wu2jvyfe	
		
7	**Расстояние между параллельными прямыми:** **Уравнения прямых:** $L_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}m_1\\n_1\\p_1\end{pmatrix}$ и $L_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}m_2\\n_2\\p_2\end{pmatrix}$ **Произвольные точки на прямых** $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$ **соответственно:** $F_1(x_1,y_1,z_1)$ и $F_2(x_2,y_2,z_2)$ **Направляющий вектор** $\overrightarrow{q_1}$ **и вектор** $\overrightarrow{F_1F_2}$**:** $\overrightarrow{q_1}\,(m_1,n_1,p_1)$ и $\overrightarrow{F_1F_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ **Расстояние между параллельными прямыми:** $d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{q_1}\times\overrightarrow{F_1F_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{q_1}\rvert}=\dfrac{\left\lVert\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\m_1&n_1&p_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\end{vmatrix}\right\rVert}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}}$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/ryrksaff	





8

Расстояние между скрещивающимися прямыми:

Уравнения прямых: $L_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$ и $L_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$

Произвольные точки на прямых L_1 и L_2 соответственно: $F_1(x_1, y_1, z_1)$ и $F_2(x_2, y_2, z_2)$

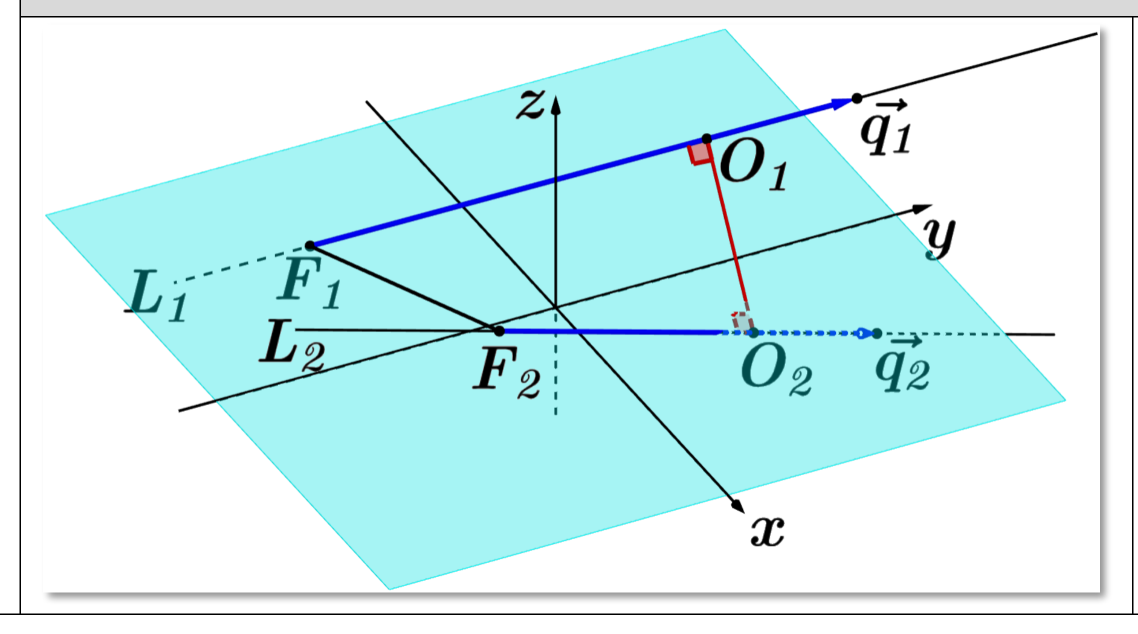
Вектор $\overrightarrow{F_1F_2}$: $\overrightarrow{F_1F_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Направляющие вектора: $\overrightarrow{q_1}\,(m_1, n_1, p_1)$ и $\overrightarrow{q_2}\,(m_2, n_2, p_2)$

Расстояние между скрещивающимися прямыми:

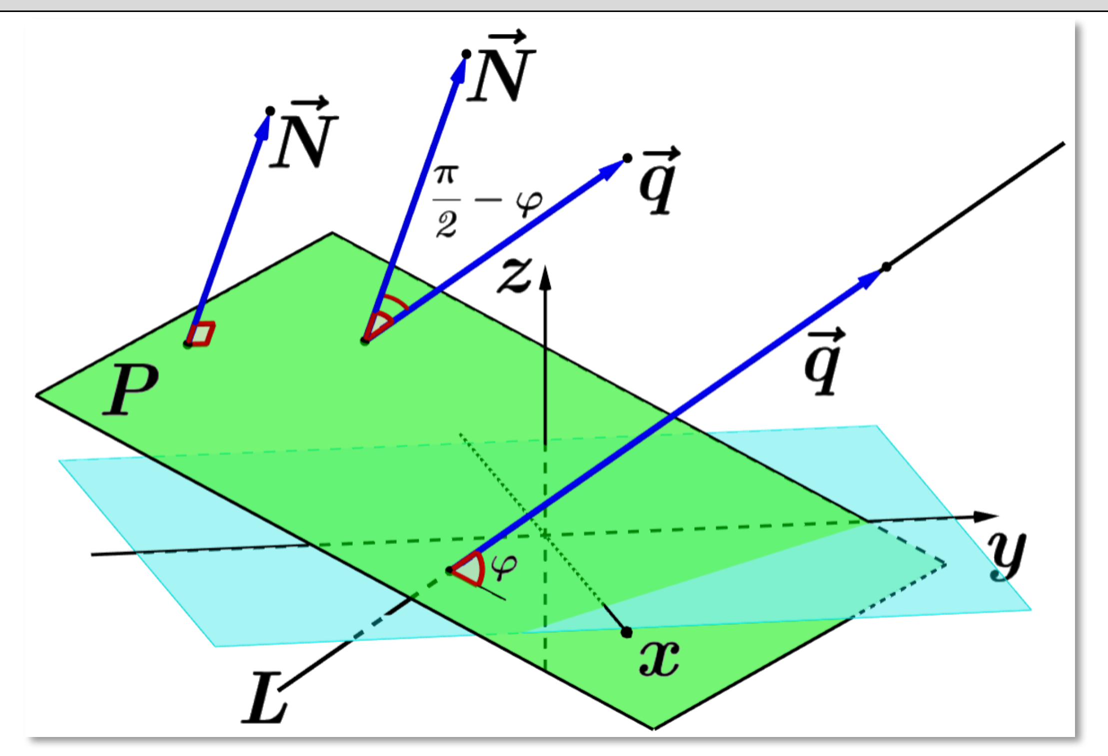
$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{q_1} \times \overrightarrow{q_2}) \cdot \overrightarrow{F_1F_2}\right|}{\left|\overrightarrow{q_1} \times \overrightarrow{q_2}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{matrix} \right\|}$$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/shzhjdfy





9.5 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

№	Прямая и плоскость в пространстве:	QR-Code
1	**Угол между прямой и плоскостью** **Уравнение плоскости:** $P\colon\ Ax + By + Cz + D = 0$ **Уравнение прямой:** $L = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ **Вектора нормали:** $\vec{N}\,(A, B, C)$ **Направляющий вектор:** $\vec{q}\,(m, n, p)$ **Угол между прямой и плоскостью:** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\lvert\vec{q}\cdot\vec{N}\rvert}{\lvert\vec{q}\rvert\cdot\lvert\vec{N}\rvert} = \frac{\lvert mA + nB + pC\rvert}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:** $L \perp P \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \qquad L \parallel P \quad \Rightarrow \quad mA + nB + pC = 0$ **Ссылка на 3D иллюстрацию:** https://www.geogebra.org/classic/s9tqn4vb	
		
2	**Точка пересечения прямой и плоскости** **Алгоритм действий для вычисления точки пересечения прямой и плоскости:** Шаг–№1: $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \begin{cases} x = m\lambda + x_0 \\ y = n\lambda + y_0 \\ z = p\lambda + z_0 \end{cases} \end{cases}$	

Шаг–№2:

$$A(m\lambda + x_0) + B(n\lambda + y_0) + C(p\lambda + z_0) + D = 0$$

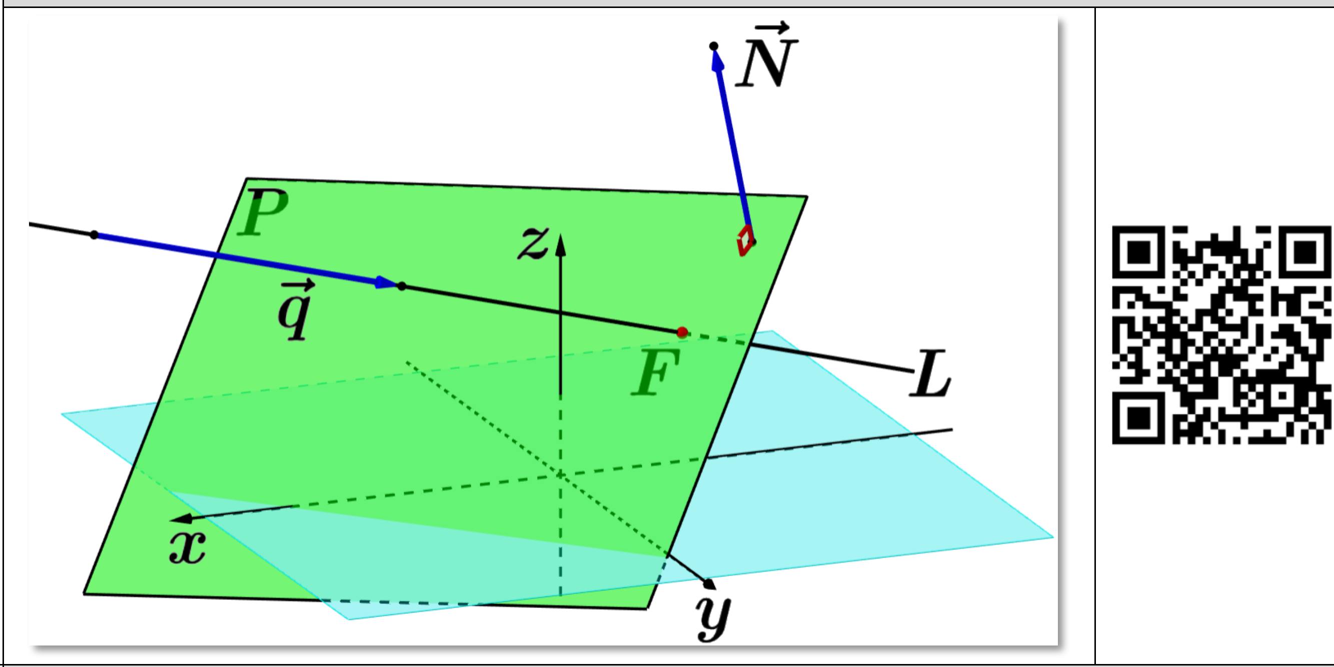
Шаг–№3:

$$\lambda_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

Шаг–№4:

$$\begin{cases} x_F = m\lambda_0 + x_0 \\ y_F = n\lambda_0 + y_0 \\ z_F = p\lambda_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow \quad F\,(x_F, y_F, z_F)$$

Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/nj3gqzat



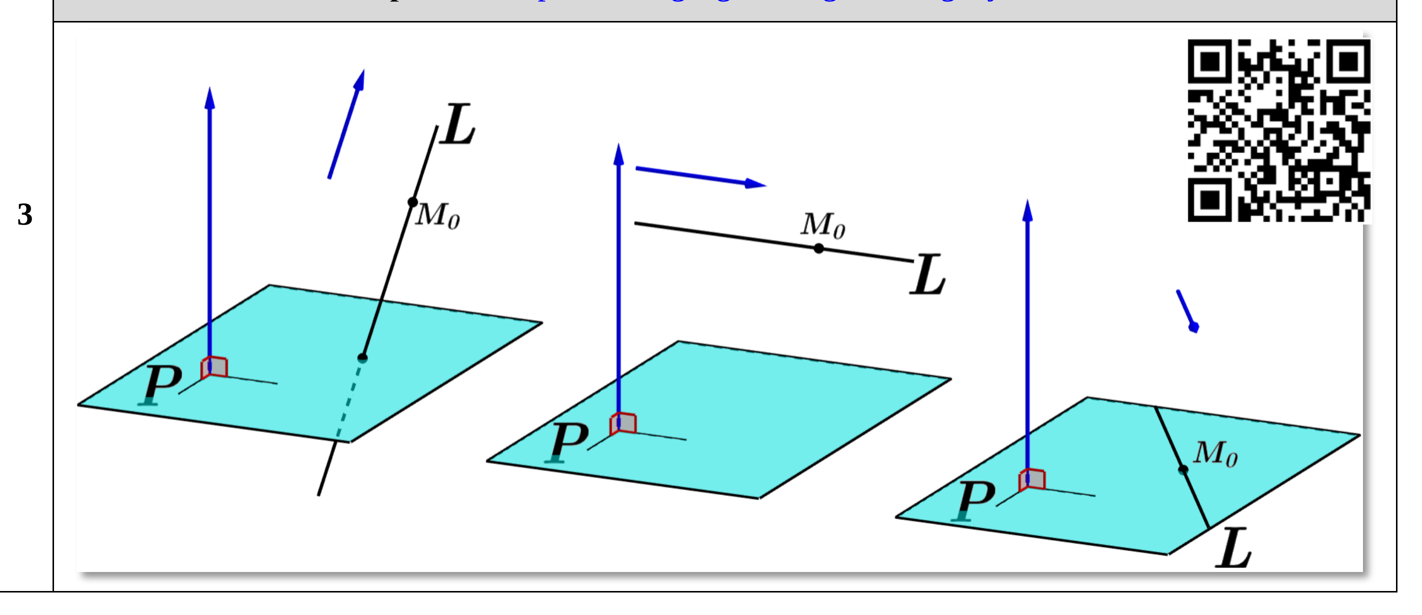


3

Взаимное расположение прямой и плоскости

L – прямая, P – плоскость, M_0 – точка, лежащая на прямой.

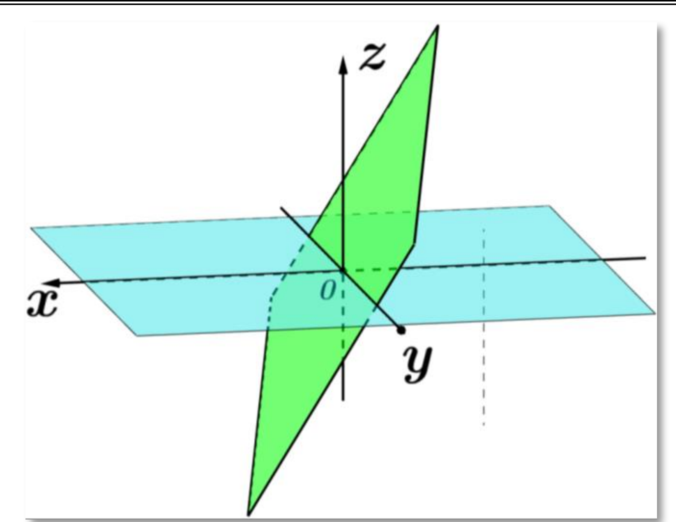
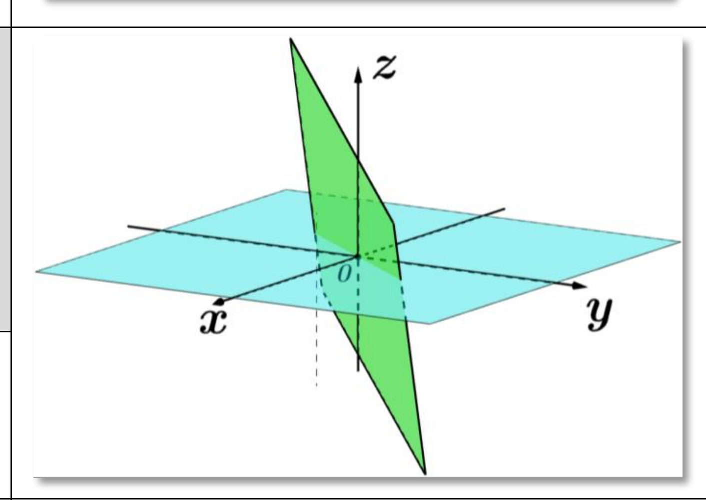
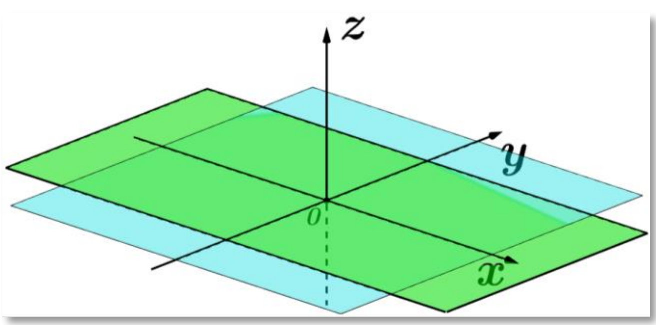
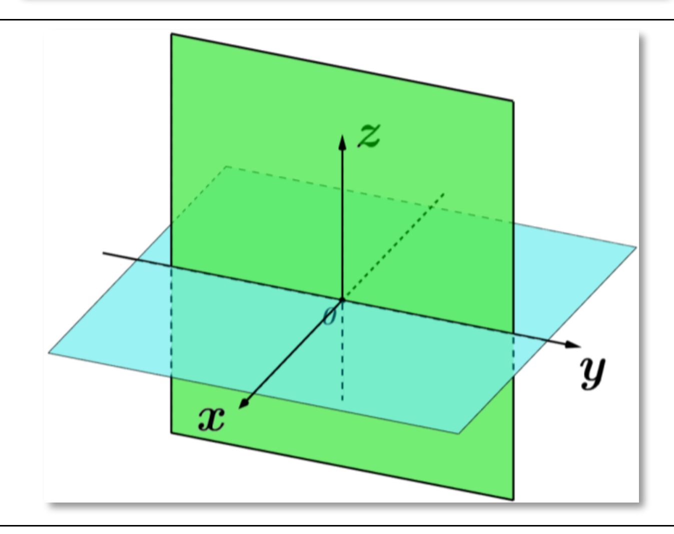
Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/gdhjkau9

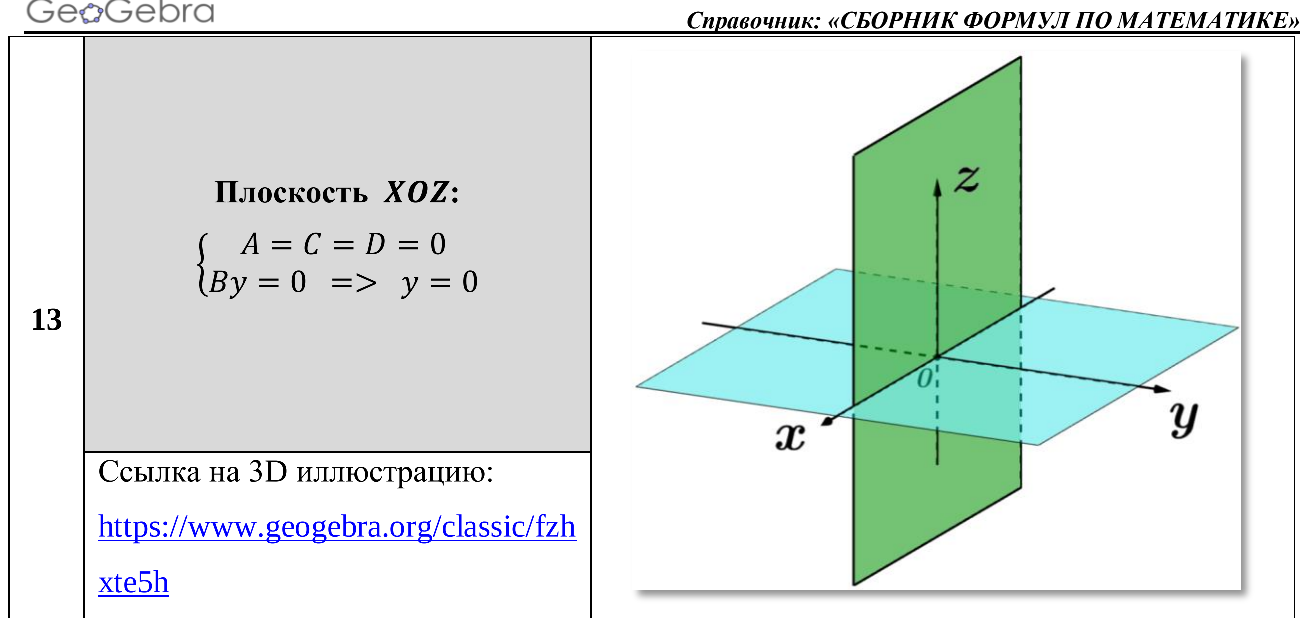


9.6 ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

№	Расположение уравнения плоскости в пространстве	3D иллюстрация
1	**Плоскость $\cap$ точку $O(0;0;0)$:** $\begin{cases} D = 0 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$	
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/v78qqxne	
2	**Плоскость $\parallel$ оси OX:** $\begin{cases} A = 0 \\ By + Cz + D = 0 \end{cases}$	
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/wcdtukvc	
3	**Плоскость $\parallel$ оси OY:** $\begin{cases} B = 0 \\ Ax + Cz + D = 0 \end{cases}$	
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/fvs985tn	
4	**Плоскость $\parallel$ оси OZ:** $\begin{cases} C = 0 \\ Ax + By + D = 0 \end{cases}$	
	Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/suefbkxb	

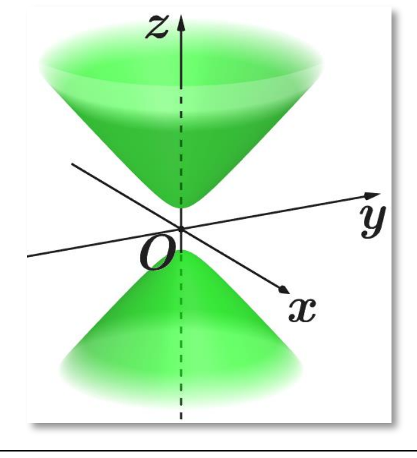
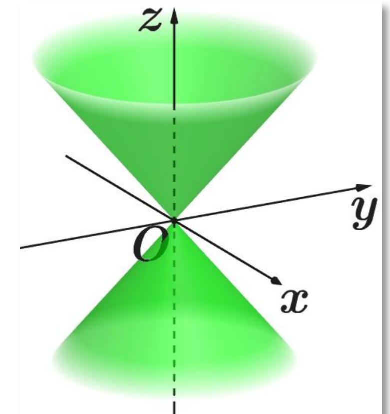
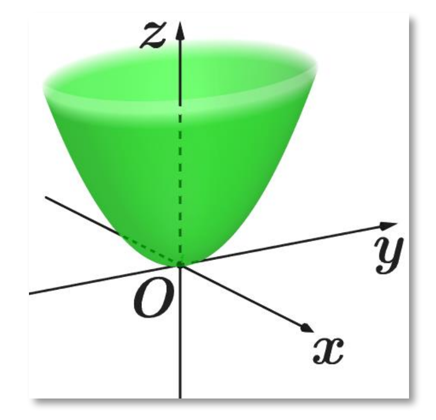
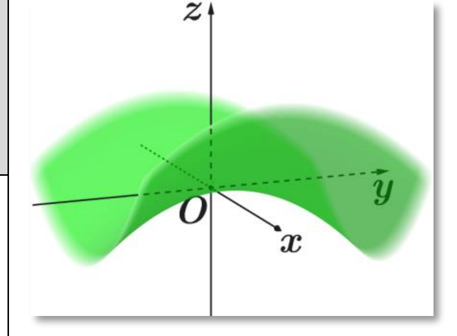
5	**Плоскость ‖ оси XOY:** $\begin{cases} A = B = 0 \\ Cz + D = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/tefsga8c	z, x, y, 0
6	**Плоскость ‖ оси YOZ:** $\begin{cases} B = C = 0 \\ Ax + D = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/paz6d9uh	z, y, 0, x
7	**Плоскость ‖ оси XOZ:** $\begin{cases} A = C = 0 \\ By + D = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/y5zmzfcr	z, 0, y, x
8	**Плоскость ∩ точку OX:** $\begin{cases} A = D = 0 \\ By + Cz = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/xegujapj	z, 0, y, x

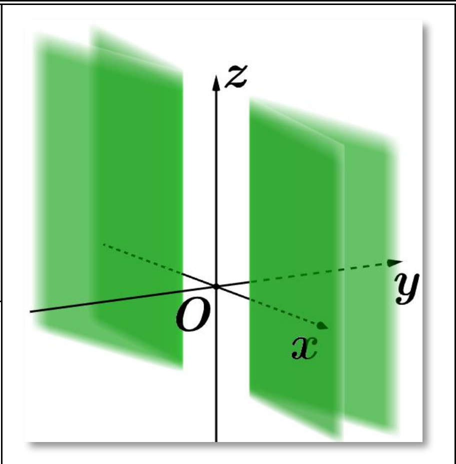
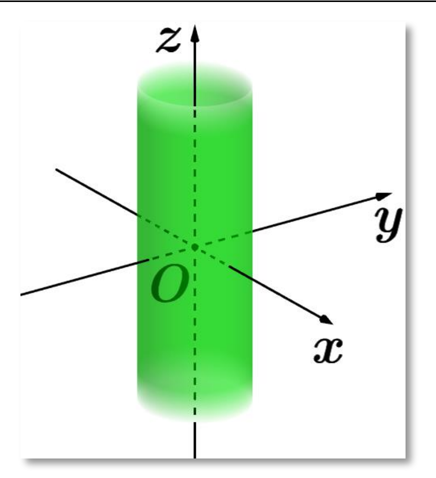
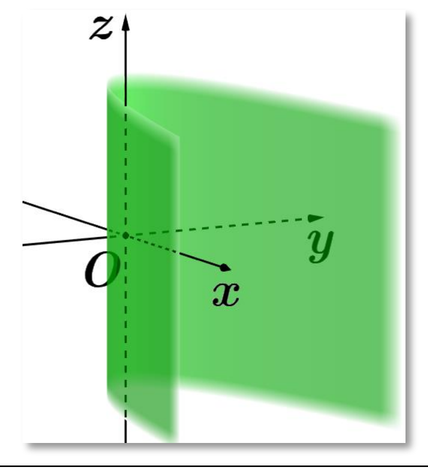
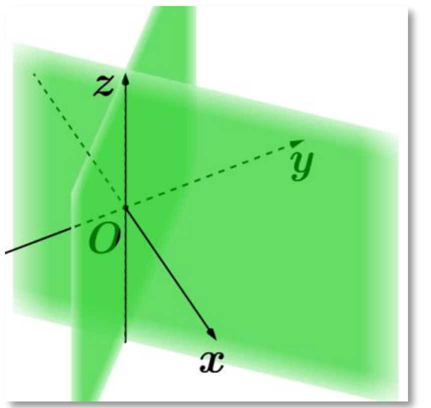
9	 **Плоскость ∩ точку OY:** $\begin{cases} B = D = 0 \\ Ax + Cz = 0 \end{cases}$  Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/xgkxg9c5	
10	**Плоскость ∩ точку OZ:** $\begin{cases} C = D = 0 \\ Ax + By = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/mdnqctsc	
11	**Плоскость XOY:** $\begin{cases} A = B = D = 0 \\ Cz = 0 \quad => \quad z = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/rsyuqpxh	
12	**Плоскость YOZ:** $\begin{cases} B = C = D = 0 \\ Ax = 0 \quad => \quad x = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/wkwvxp9b	

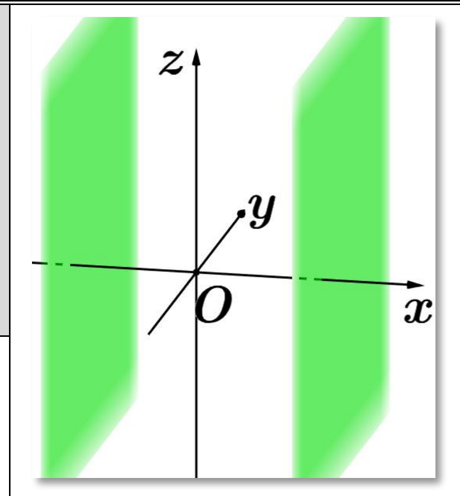
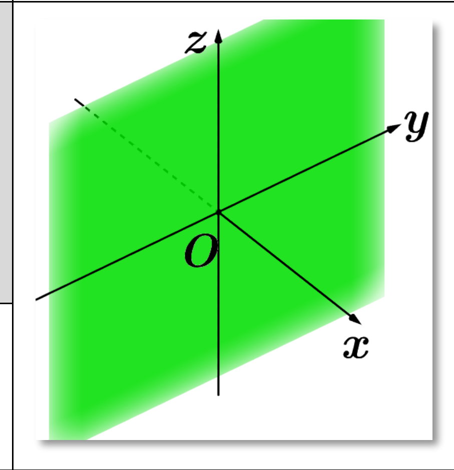
13	**Плоскость** XOZ**:** $\begin{cases} A = C = D = 0 \\ By = 0 \;\; => \;\; y = 0 \end{cases}$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/fzhxte5h	

9.7 ПОВЕРХНОСТИ II-ГО ПОРЯДКА

№	Поверхность II-го порядка	3D иллюстрация	QR-Code
1	**Трехосный эллипсоид:** $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/mwdfefkx		
2	**Однополостный гиперболоид:** $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/qpdszq3d		

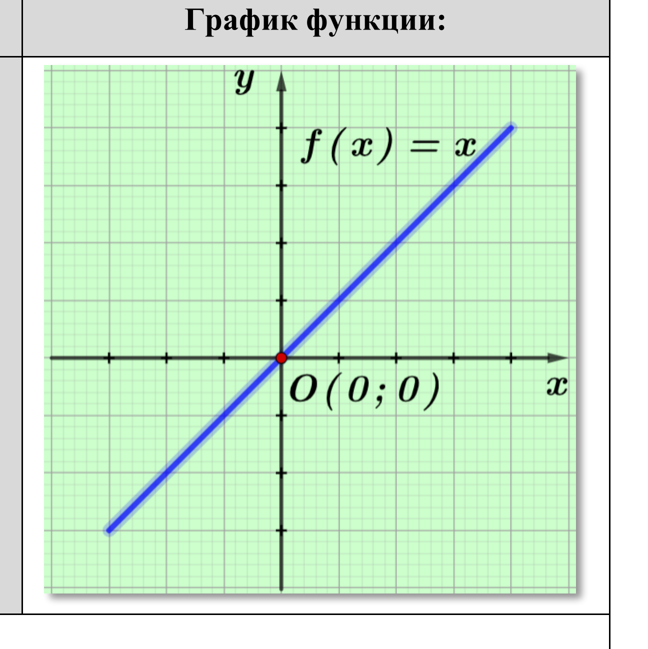
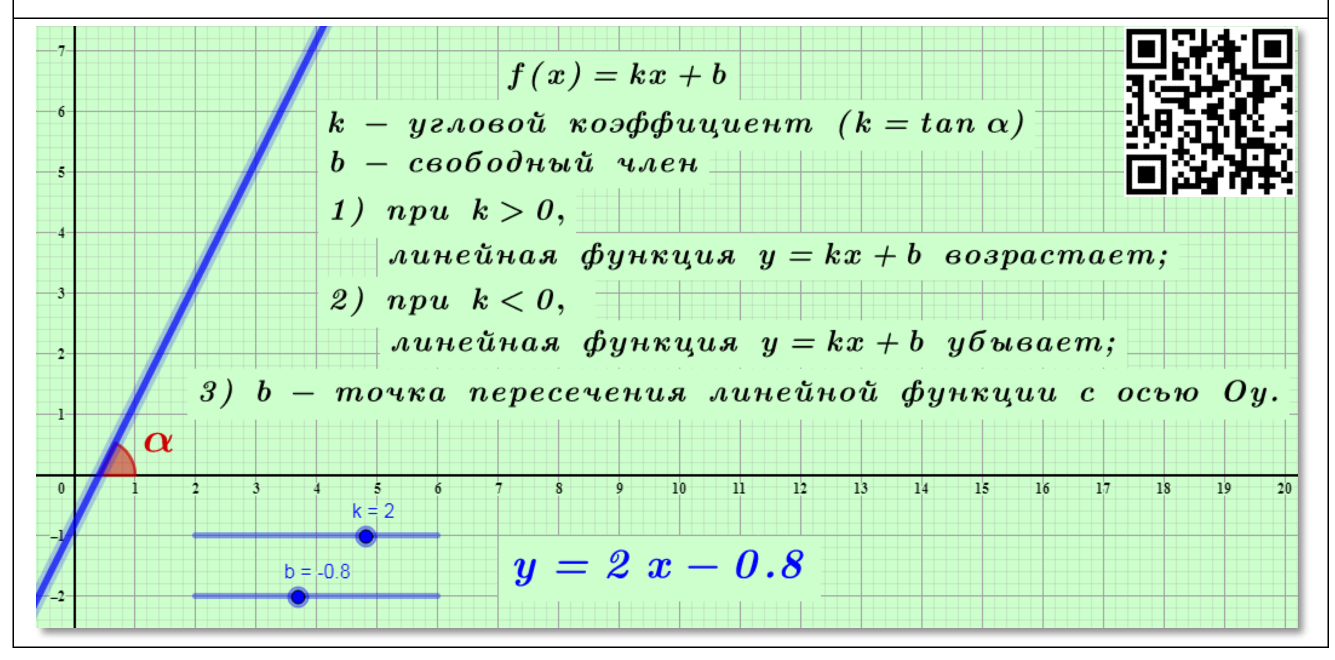
3	**Двуполостный гиперболоид:** $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/qxncwder		
4	**Конус II-го порядка:** $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/rfruxscw		
5	**Эллиптический параболоид:** $$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q},(p>0,q>0)$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/xr3vj4ev		
6	**Гиперболический параболоид:** $$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},(p>0,q>0)$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/qn7pgvjb		

7	**Гиперболический цилиндр:** $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/wy4ge6jg		
8	**Эллиптический цилиндр:** $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/a28samtk		
9	**Параболический цилиндр:** $$y^2 = 2px$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/pz6reshk		
10	**Пара пересекающихся плоскостей:** $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/pcjcbcek		

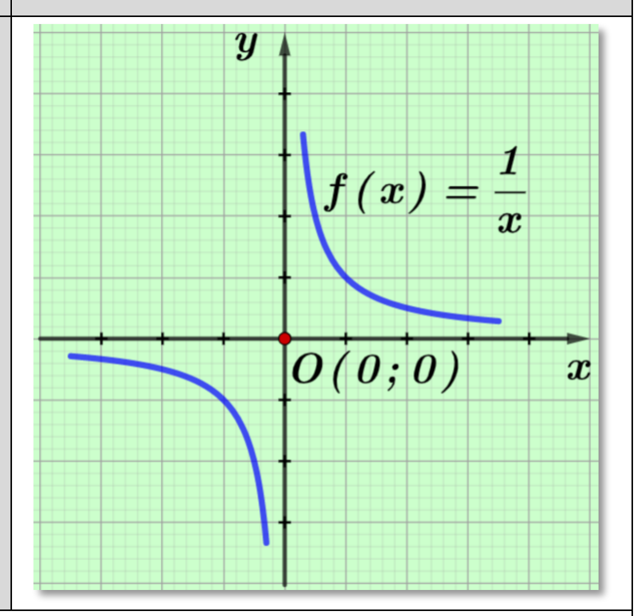
11	**Пара параллельных плоскостей:** $$\frac{x^2}{a^2} = 1$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/bkh86nys		
12	**Пара совпадающих плоскостей:** $$x^2 = 0$$ Ссылка на 3D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/nw7cenng		

Раздел – X. ГРАФИКИ И СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

10.1 ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

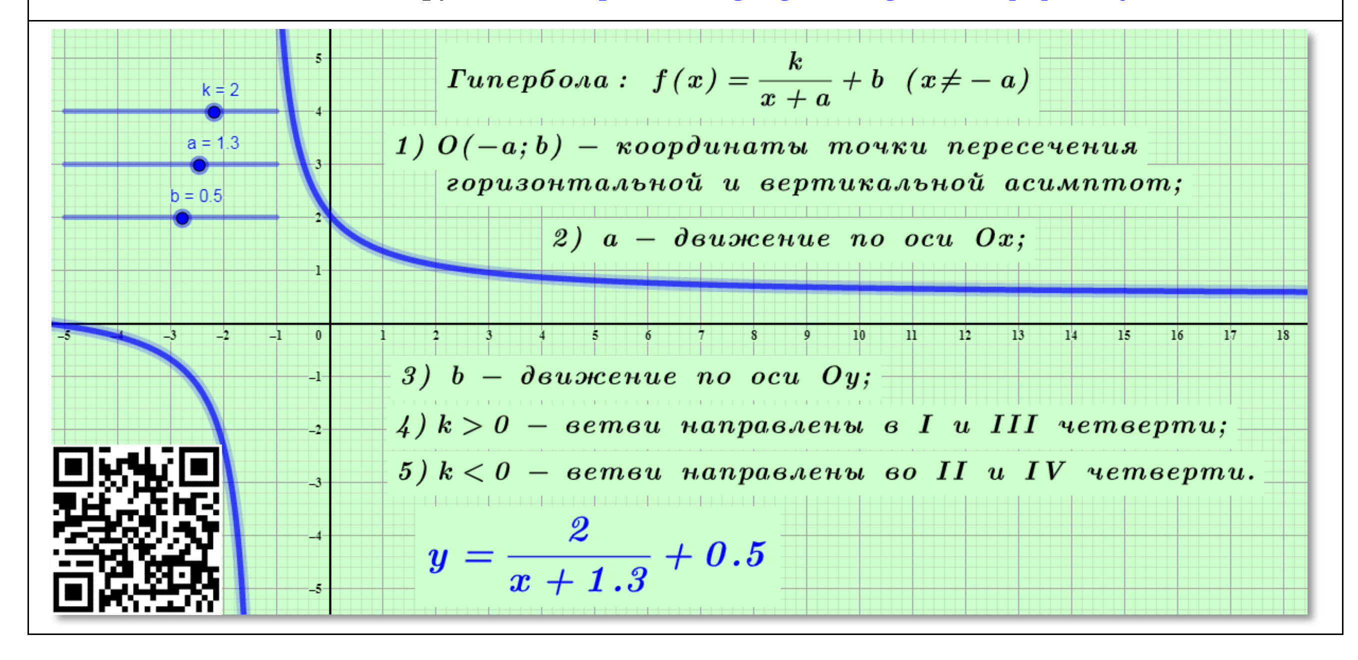
<table>
<tr><th>Функция вида: $y = x$</th><th>График функции:</th></tr>
<tr><td>1) Область определения и множество значений:
$D(f) = (-\infty; +\infty)$ и
$E(f) = (-\infty; +\infty)$
2) Функция нечетная:
$f(-x) = -f(x)$
3) Нули функции:
$f(x) \cap Ox = (0; 0)$
4) Промежутки возрастания функции:
$f(x)\colon\ x \in (-\infty; +\infty) \ \Rightarrow\ (\uparrow)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Линейная функция: $y = kx + b$
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/hqusqaqv</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

10.2 ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

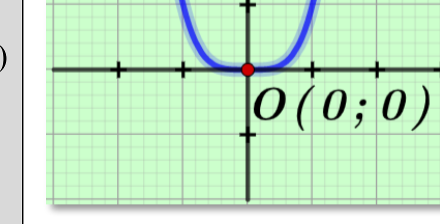
Функция вида: $y = \frac{1}{x}$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ 2) Функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$ 3) Асимптоты функции: ВА: $x = 0$, ГА: $y = 0$ 4) Промежутки убывания функции: $f(x)$: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \Rightarrow (\downarrow)$	

Дробно-линейная функция: $y = \frac{k}{x+a} + b$

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/q6qcbm5y

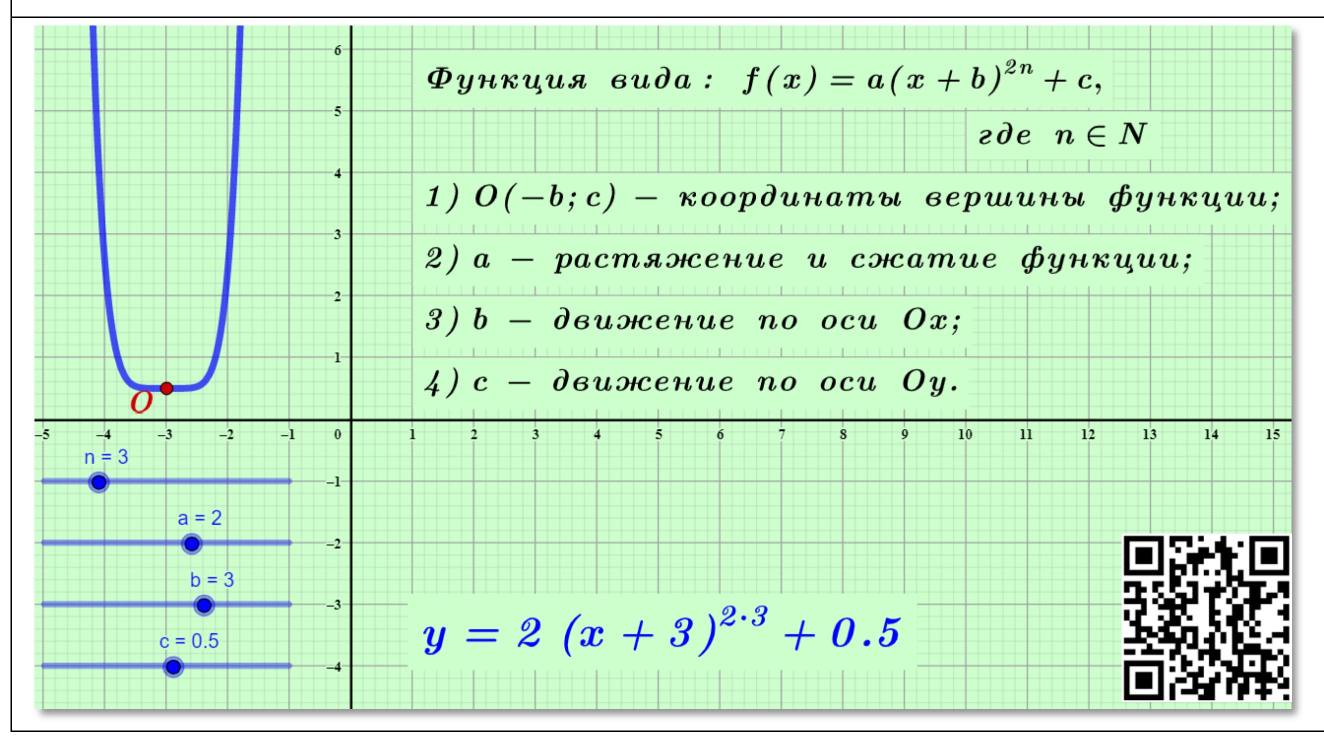


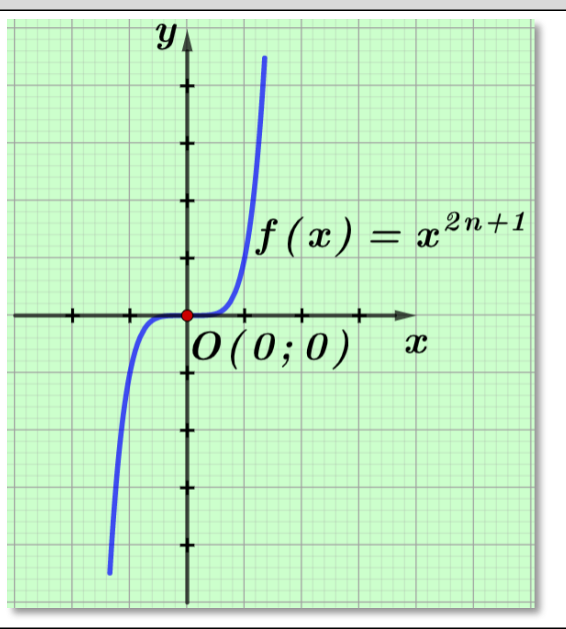
10.3 СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Функция вида: $y = x^{2n}$, где $n \in N$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = [0; +\infty)$ 2) Функция четная: $f(-x) = f(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) Промежутки возрастания (убывания) функции: $f(x)\colon\ x \in (-\infty; 0] \ \Rightarrow\ (\downarrow)$ и $f(x)\colon\ x \in [0; +\infty) \ \Rightarrow\ (\uparrow)$	

а) Функция вида: $y = a(x+b)^{2n} + c$, где $n \in N$.

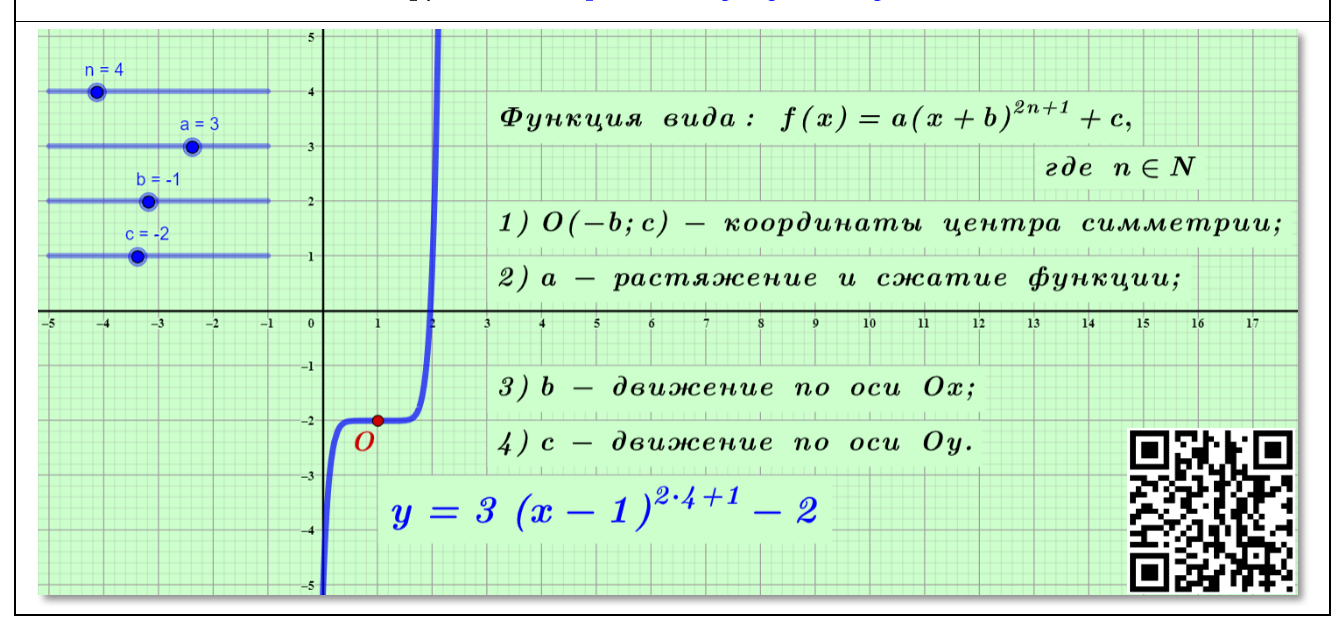
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/rhkppvfb

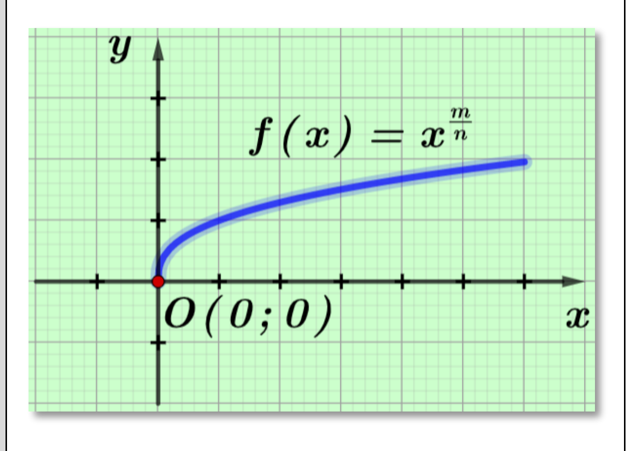


Функция вида: $y = x^{2n+1}$, где $n \in N$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (-\infty; +\infty)$ 2) Функция нечетная: $f(-x) = -f(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) Промежутки возрастания функции: $f(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$	

b) Функция вида: $y = a(x + b)^{2n+1} + c$, где $n \in N$.

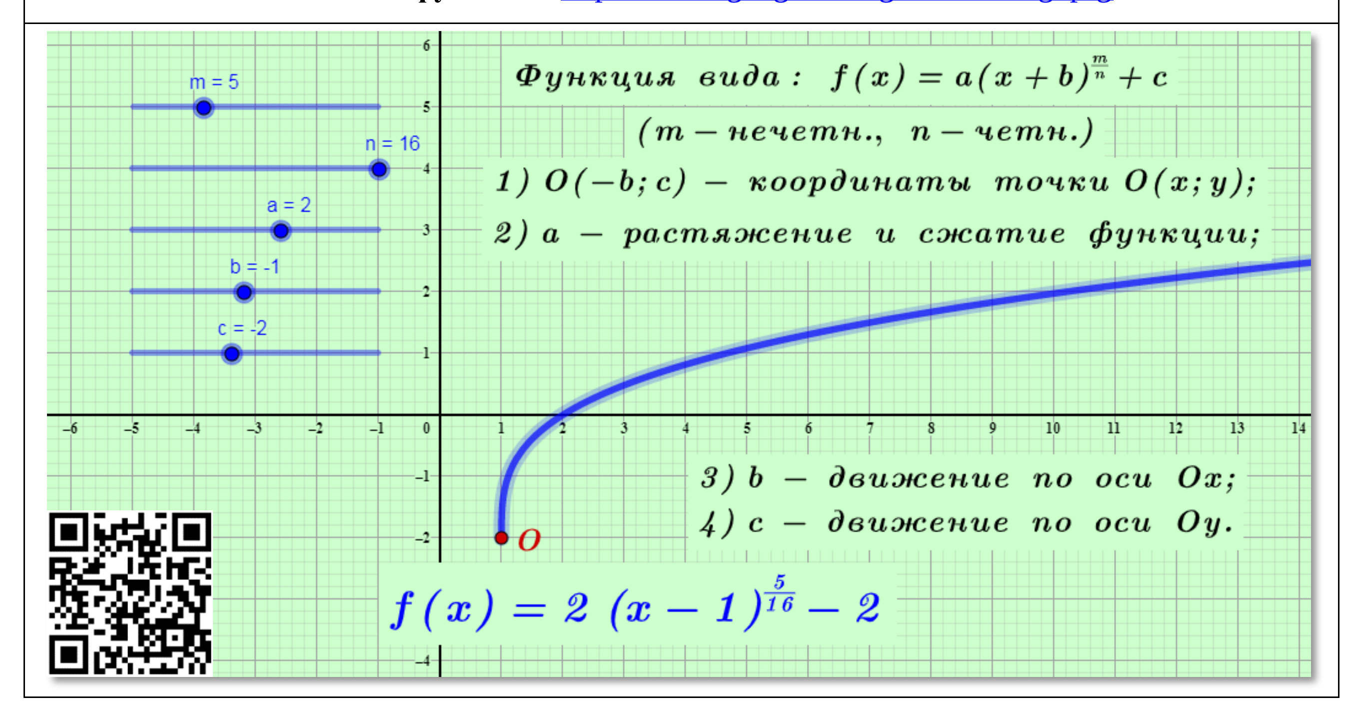
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/dndw3dnr

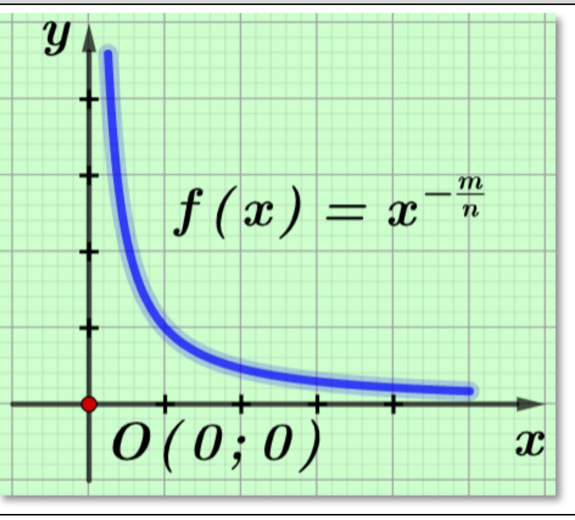


Функция вида: $y = x^{\frac{m}{n}}$ $(m - \text{нечетн}, \;\; n - \text{четн.})$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = [0; +\infty)$ и $E(f) = [0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная: $f(-x) \neq \pm f(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) Промежутки возрастания функции: $f(x){:}\; x \in [0; +\infty) \;\; \Rightarrow \;\; (\uparrow)$	

c) Функция вида: $y = a(x+b)^{\frac{m}{n}} + c$ $(m - \text{нечет.}, \; n - \text{четн.})$.

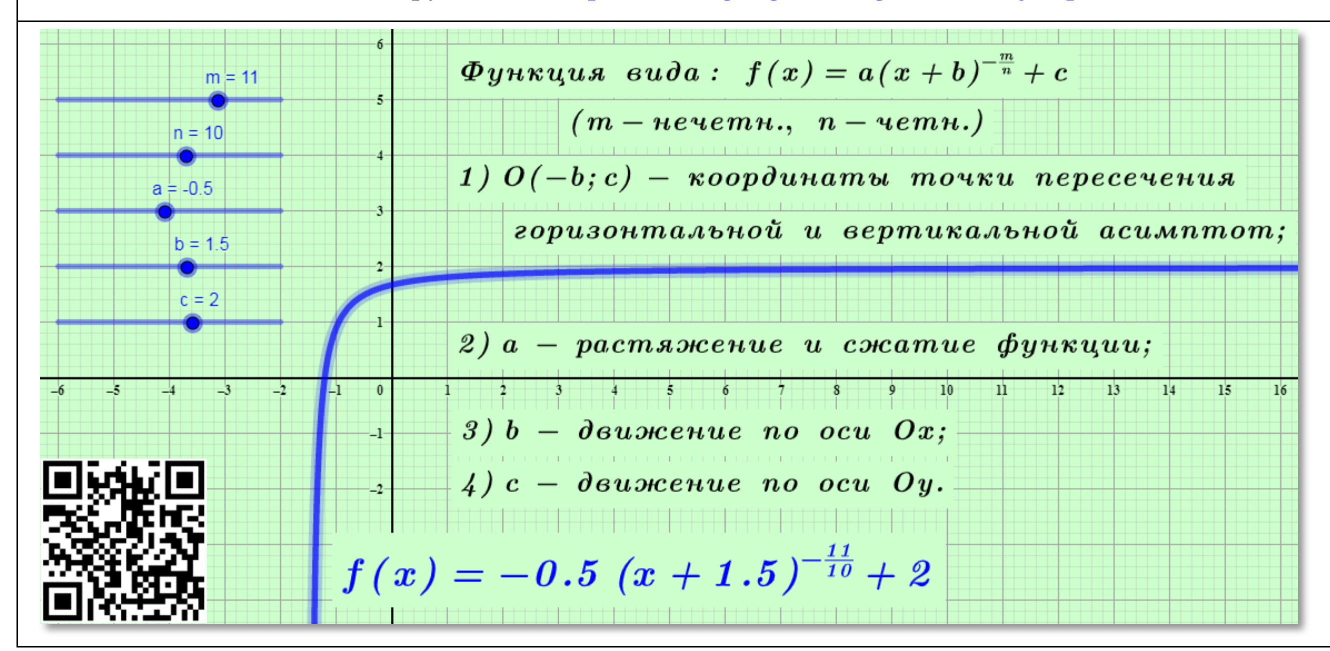
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/utkg5pfg

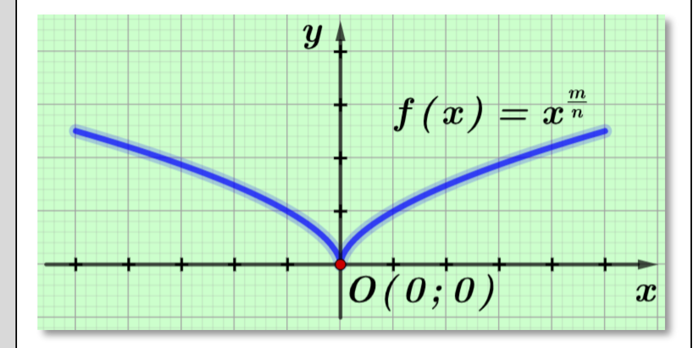


Функция вида: $y = x^{-\frac{m}{n}}$ (m − нечетн, n − четн.)	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (0; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная: $f(-x) \neq \pm f(x)$ 3) Асимптоты функции: ВА: $x = 0$, ГА: $y = 0$ 4) Промежутки убывания функции: $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\downarrow)$	

d) Функция вида: $y = a(x+b)^{-\frac{m}{n}} + c$ (m − нечет., n − четн.).

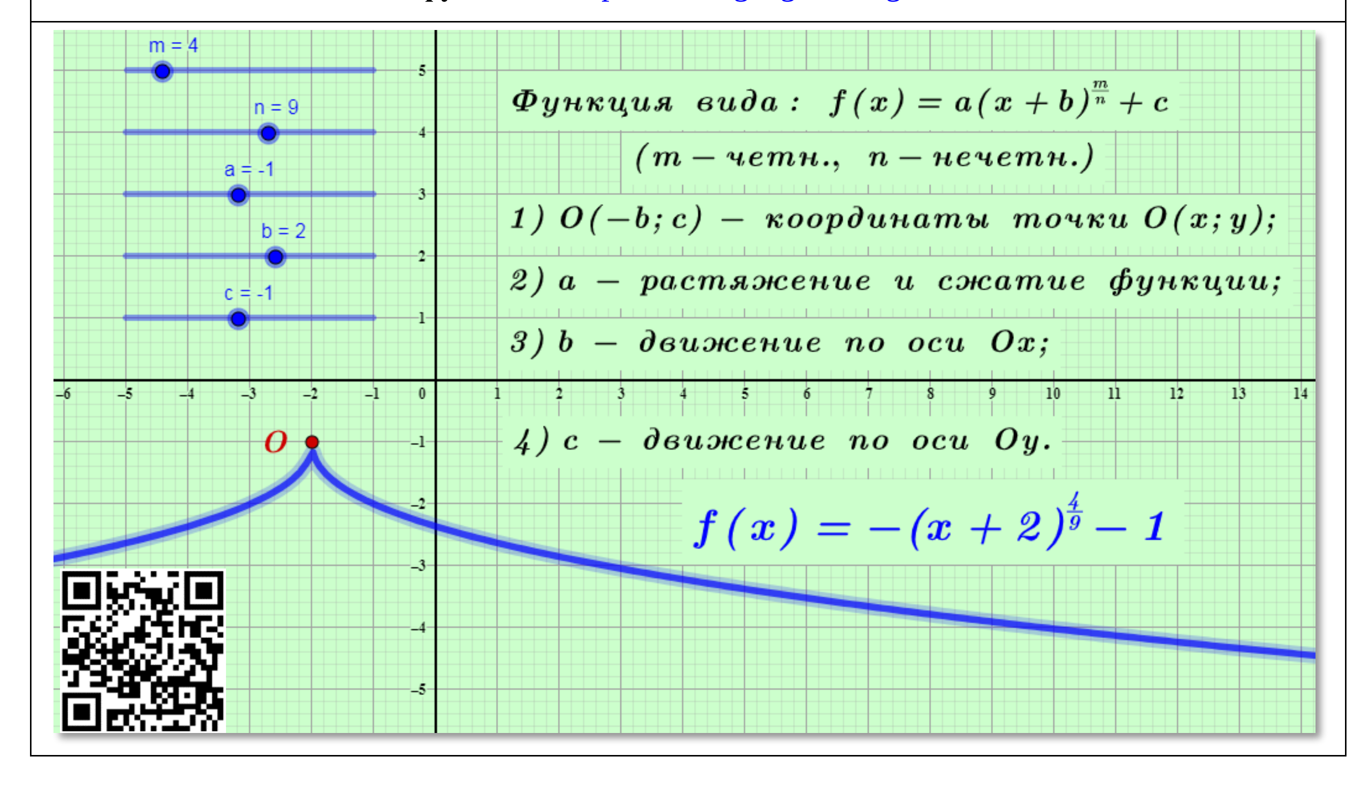
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/sny7dp4k

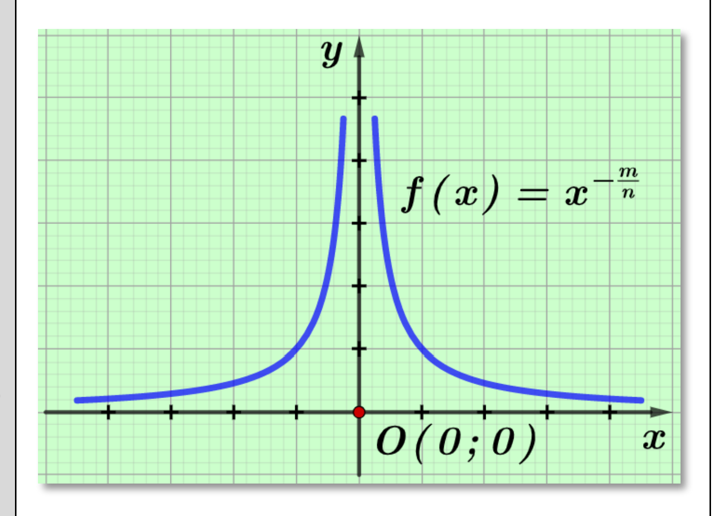


Функция вида: $y = x^{\frac{m}{n}}$ $(m - \text{четн}, \ n - \text{нечетн.})$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [0; +\infty)$ и $E(f) = [0; +\infty)$ 2) Функция четная: $f(-x) = f(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) Промежутки возрастания (убывания) функции: $f(x)\colon\ x \in (-\infty; 0] \ \Rightarrow\ (\downarrow)$ и $f(x)\colon\ x \in [0; +\infty) \ \Rightarrow\ (\uparrow)$	

е) Функция вида: $y = a(x+b)^{\frac{m}{n}} + c$ $(m - \text{четн.}, \ n - \text{нечетн.})$.

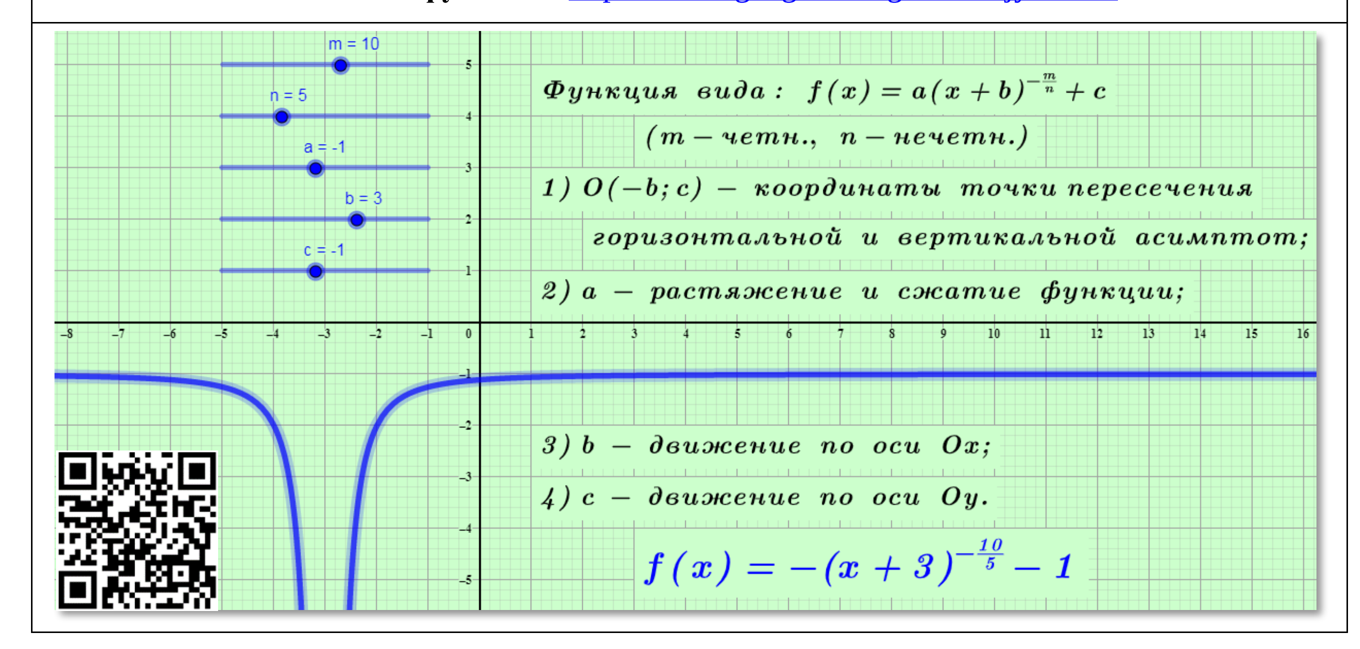
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/nxthsssf



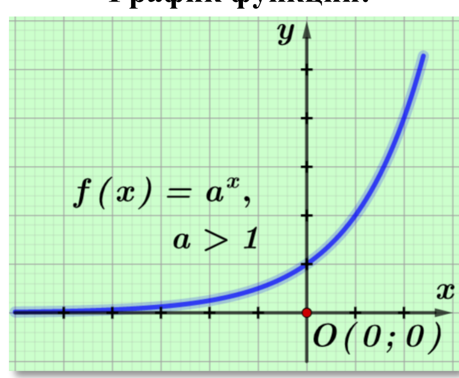
Функция вида: $y = x^{-\frac{m}{n}}$ (m – четн, n – нечетн.)	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция четная: $f(-x) = f(x)$ 3) Асимптоты функции: ВА: $x = 0$, ГА: $y = 0$ 4) Промежутки возрастания (убывания) функции: $f(x)$: $x \in (-\infty; 0)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$ и $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\downarrow)$	

f) Функция вида: $y = a(x+b)^{-\frac{m}{n}} + c$ (m – четн., n – нечетн.).

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/jy8hh3sf

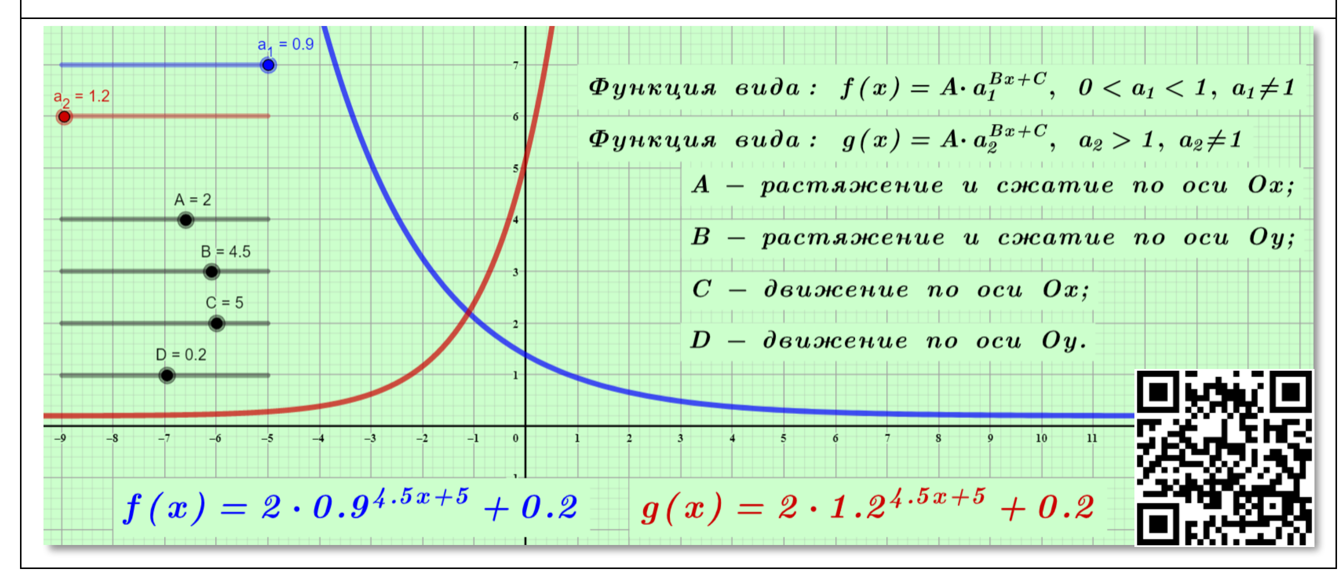


10.4 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

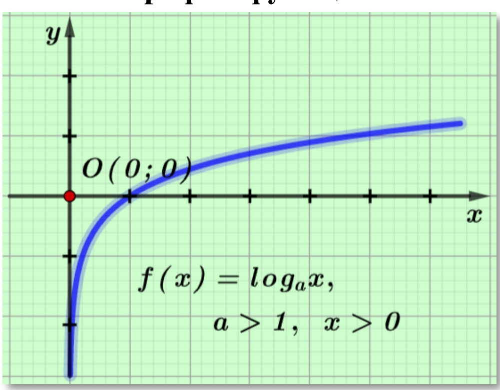
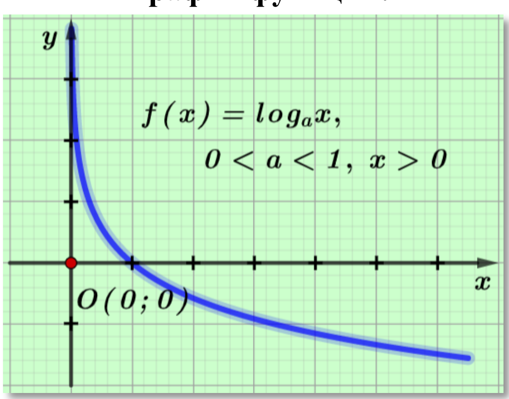
Функция вида: $y = a^x$ $(a > 1,\ a \neq 1)$.	**Функция вида:** $y = a^x$ $(0 < a < 1,\ a \neq 1)$.
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная 3) Нули функции: $f(x) \cap Oy = (0; 1)$ 4) Асимптота функции: ГА: $y = 0$ 5) Промежутки возрастания функции: $f(x)\colon\ x \in (-\infty; +\infty)\ \Rightarrow\ (\uparrow)$	1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная 3) Нули функции: $f(x) \cap Oy = (0; 1)$ 4) Асимптота функции: ГА: $y = 0$ 5) Промежутки убывания функции: $f(x)\colon\ x \in (-\infty; +\infty)\ \Rightarrow\ (\downarrow)$
График функции:  	**График функции:** 

Функция вида: $y = A \cdot {a_1}^{Bx+C}$ $(0 < a_1 < 1,\ a_1 \neq 1)$ и $y = A \cdot {a_2}^{Bx+C}$ $(a_2 > 1,\ a_2 \neq 1)$.

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/t2pgeqyn



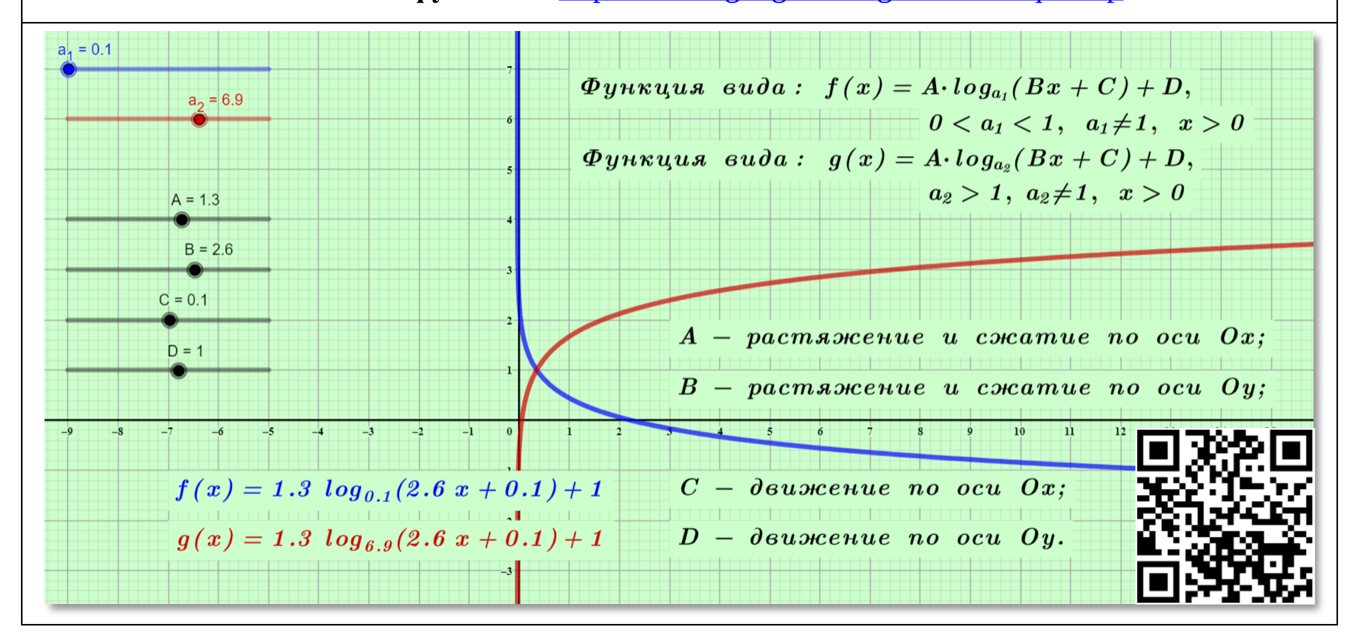
10.5 ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция вида: $y = \log_a x$ $(a > 1,\ a \neq 1,\ x > 0)$	**Функция вида:** $y = \log_a x$ $(0 < a < 1,\ a \neq 1,\ x > 0)$
1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (1; 0)$ 4) Асимптота функции: ВА: $x = 0$ 5) Промежутки возрастания функции: $f(x)\text{: } x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow (\uparrow)$	1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) Функция ни четная, ни нечетная 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (1; 0)$ 4) Асимптота функции: ВА: $x = 0$ 5) Промежутки убывания функции: $f(x)\text{: } x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow (\downarrow)$
График функции: 	**График функции:** 

Функция вида: $y = A \cdot \log_{a_1}(Bx + C) + D$ $(0 < a_1 < 1,\ a_1 \neq 1,\ x > 0)$ и

$$y = A \cdot \log_{a_2}(Bx + C) + D \quad (a_2 > 1,\ a_2 \neq 1,\ x > 0).$$

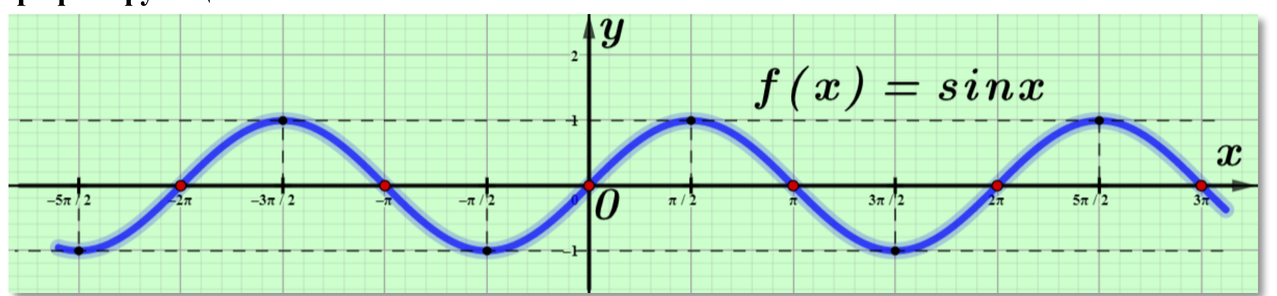
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/nvq25uup



10.6 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция вида: $y = \sin x$

График функции:



1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = [-1; 1]$

2) Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin(x)$

3) Функция периодическая: $T_{sin} = 2\pi$

4) Нули функции: $f(x) \cap Ox$: $x = \pi k, \ \ k \in Z$

5) Промежутки возрастания функции:

$$f(x)\colon\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z \quad \Rightarrow \quad (\uparrow)$$

6) Промежутки убывания функции:

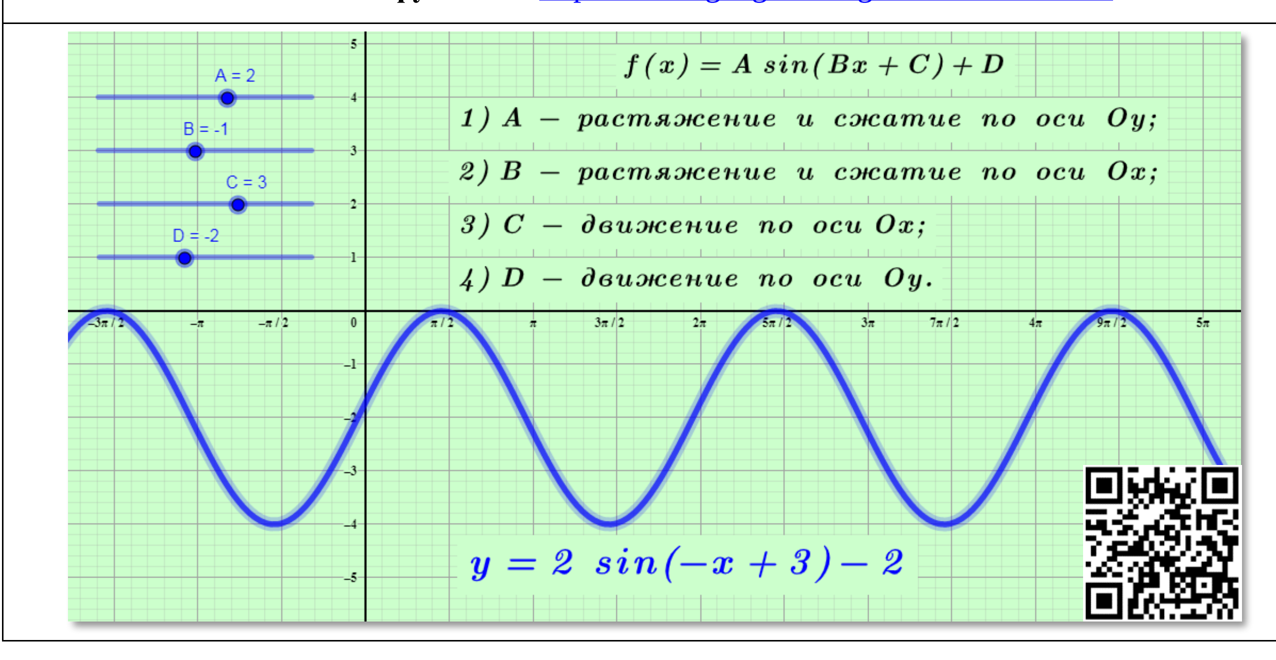
$$f(x)\colon\ x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z \quad \Rightarrow \quad (\downarrow)$$

7) Экстремумы функции:

$$x_{max} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \quad \text{и} \quad x_{min} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

а) Функция вида (синусоида): $y = A\sin(Bx + C) + D$.

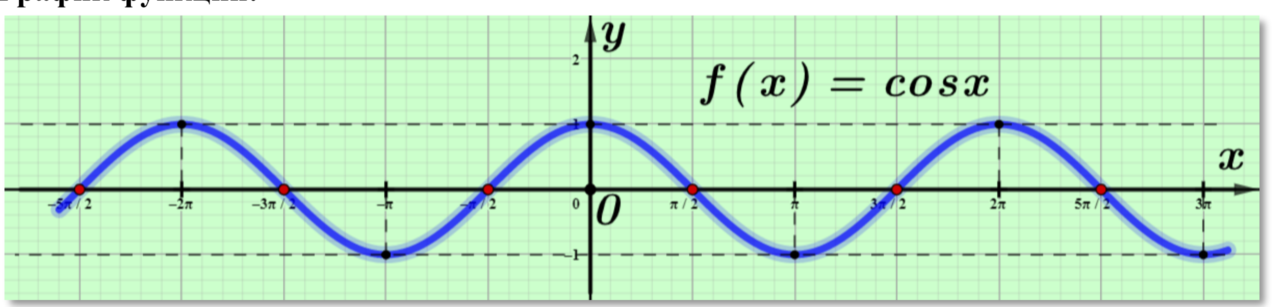
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/bhnnm6vu





Функция вида: $y = \cos x$

График функции:



1) Область определения и множество значений: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $E(f) = [-1; 1]$

2) Функция четная: $\cos(-x) = \cos(x)$

3) Функция периодическая: $T_{cos} = 2\pi$

4) Нули функции:

$$f(x) \cap Ox:\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

5) Промежутки возрастания функции:

$$f(x):\ x \in [\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k], k \in Z \quad \Rightarrow \quad (\uparrow)$$

6) Промежутки убывания функции:

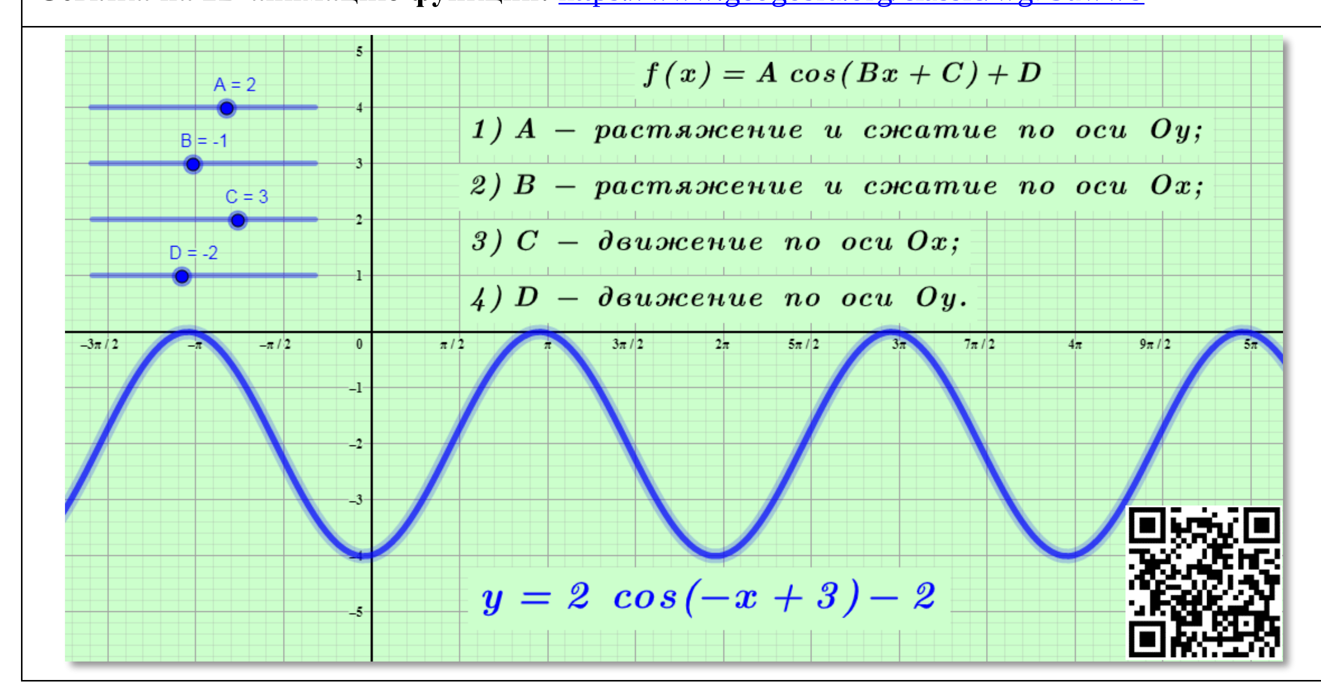
$$f(x):\ x \in [2\pi k;\ \pi + 2\pi k], k \in Z \quad \Rightarrow \quad (\downarrow)$$

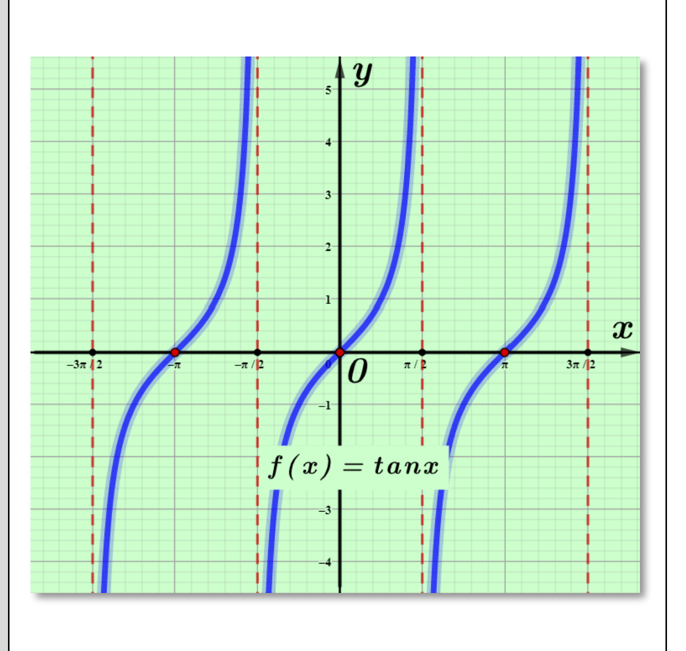
7) Экстремумы функции:

$$x_{max} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi k, k \in Z \quad \text{и} \quad x_{min} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k, k \in Z$$

b) Функция вида (косинусоида): $y = A\cos(Bx + C) + D$.

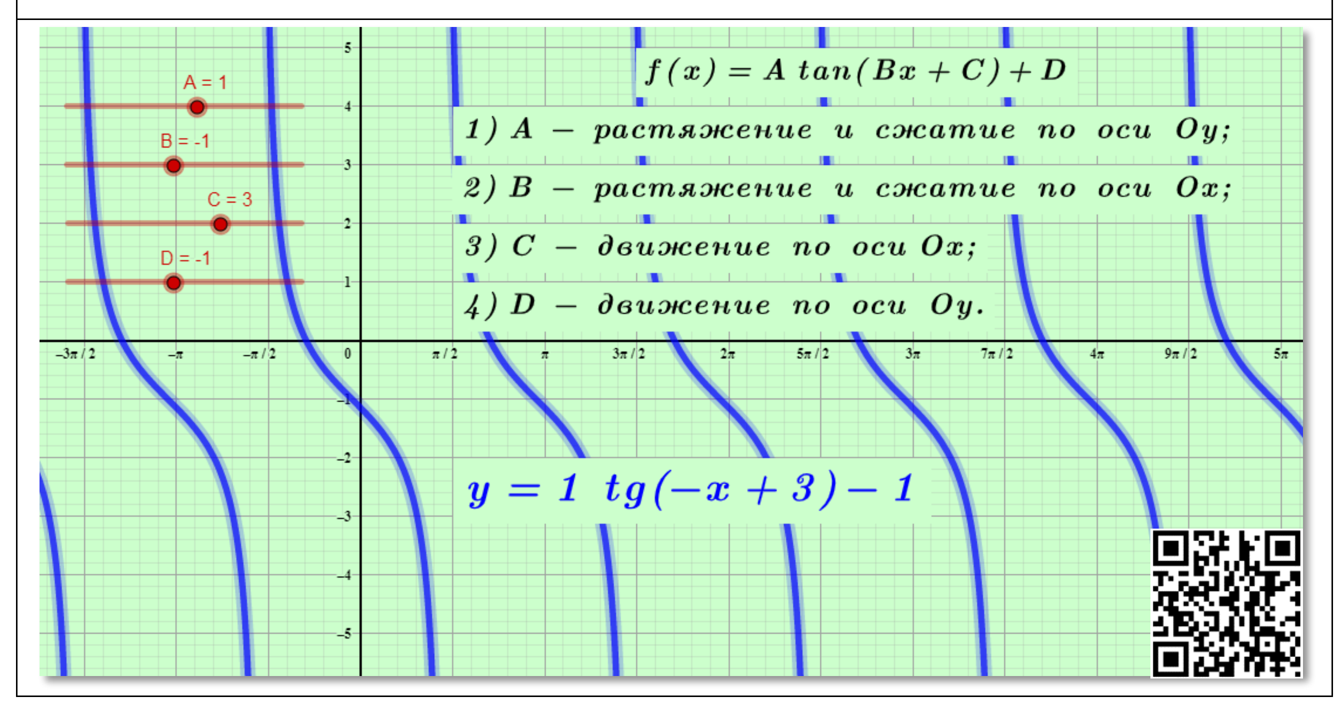
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/wg75uwwb

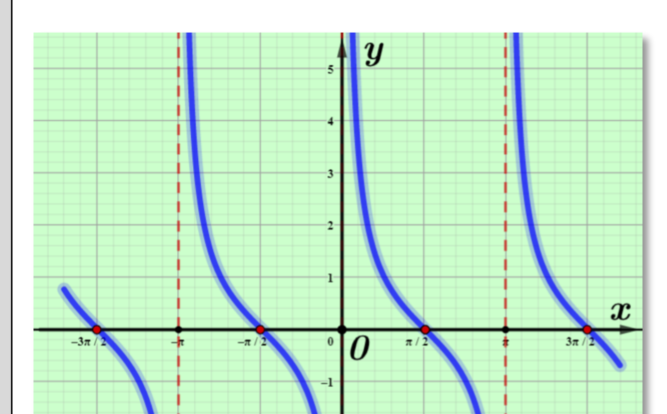


Функция вида: $y = \tan x$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f)\colon\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ и $E(f) = R$ 2) Функция нечетная: $\tan(-x) = -\tan(x)$ 3) Функция периодическая: $T_{tan} = \pi$ 4) Нули функции: $f(x) \cap Ox\colon\ x = \pi k,\ \ k \in Z$ 5) Асимптота функции: ВА: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ 6) Промежутки возрастания функции: $f(x)\colon\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z\ \ \Rightarrow\ (\uparrow)$	

c) Функция вида (тангенсоида): $y = A\tan(Bx + C) + D$.

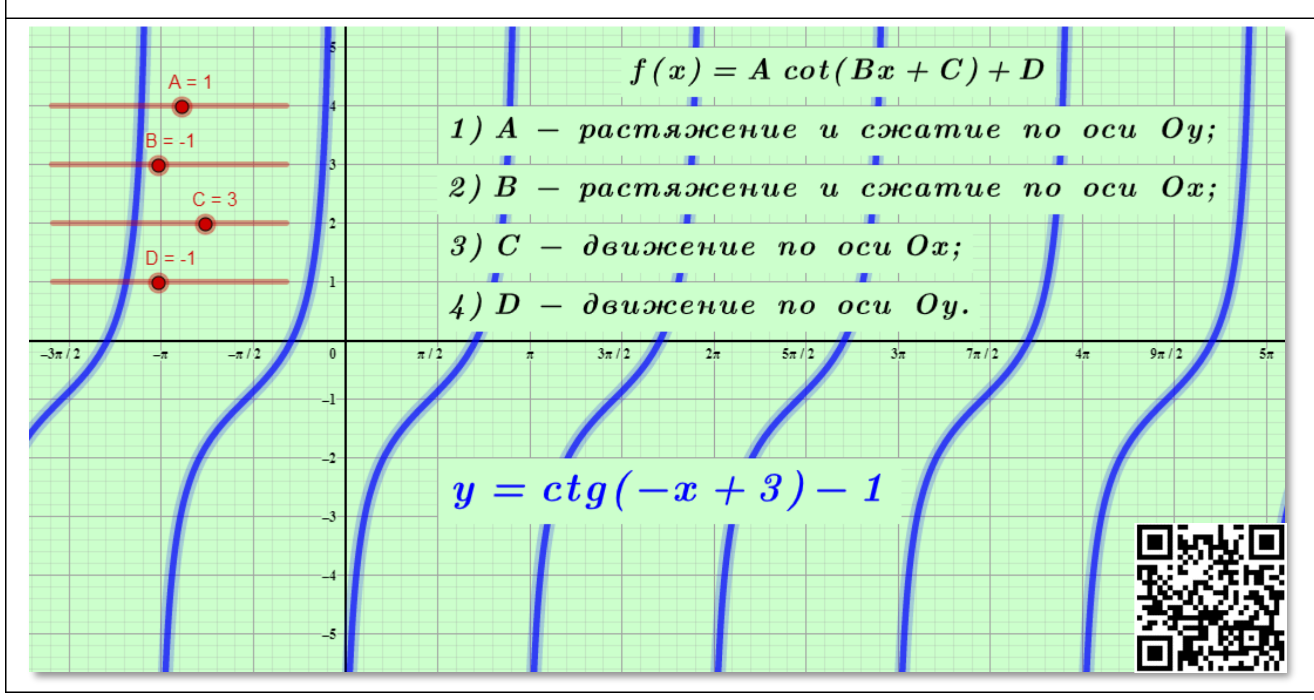
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/e4fwysxg



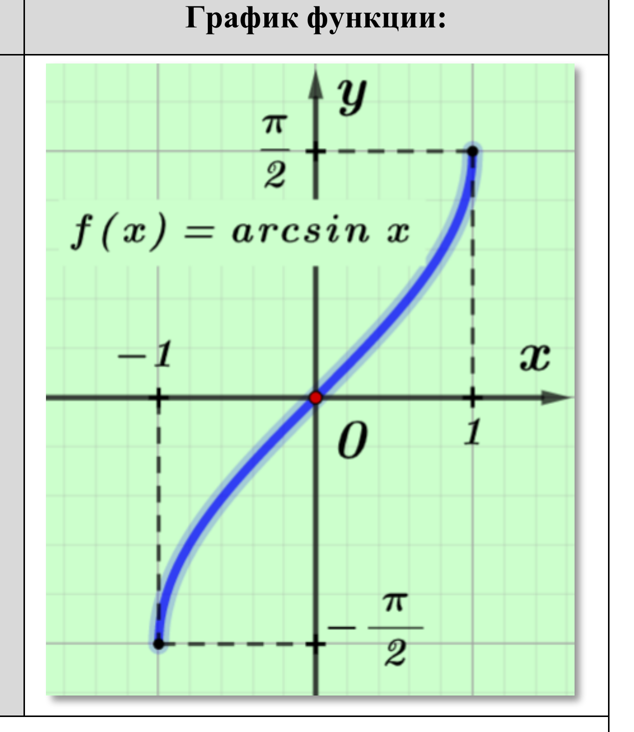
Функция вида: $y = \cot x$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f)\colon\ x \neq \pi k, k \in Z$ и $E(f) = R$ 2) Функция четная: $\cot(-x) = -\cot(x)$ 3) Функция периодическая: $T_{cot} = \pi$ 4) Нули функции: $f(x) \cap Ox\colon\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$ 5) Асимптота функции: ВА: $x = \pi k, k \in Z$ 6) Промежутки убывания функции: $f(x)\colon\ x \in (\pi k;\ \pi + \pi k), k \in Z\ \ \Rightarrow\ (\downarrow)$	

d) Функция вида (котангенсоида): $y = A\cot(Bx + C) + D$.

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/mwyeghrv

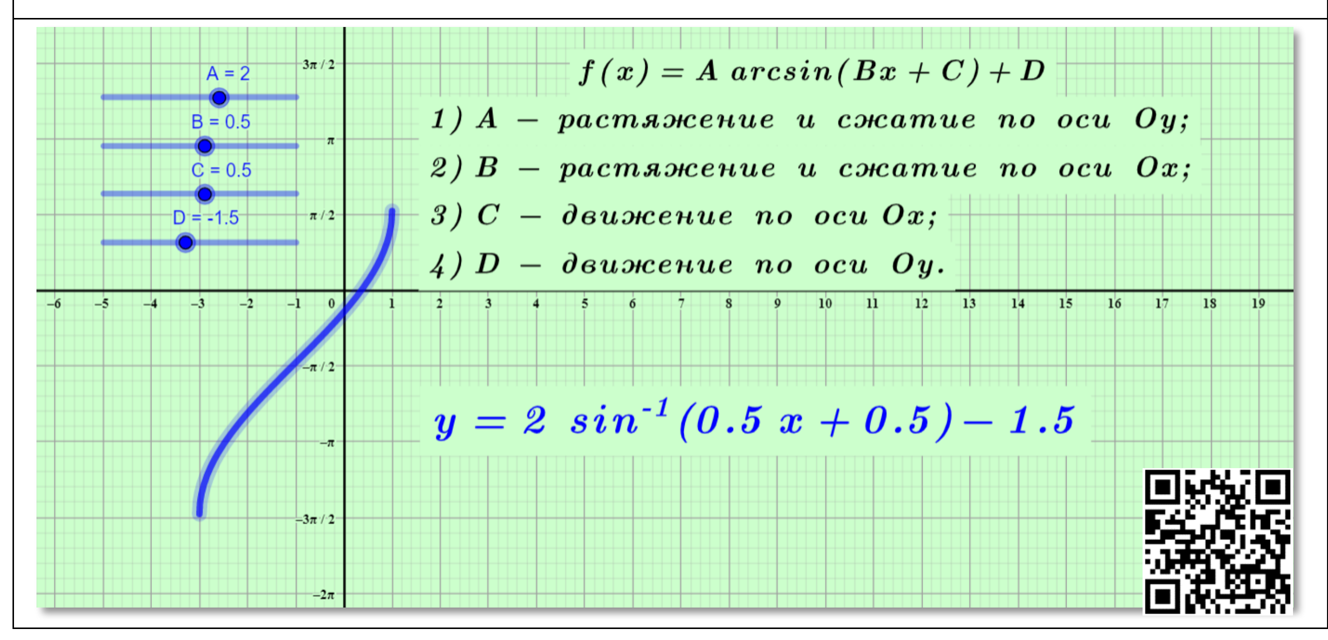


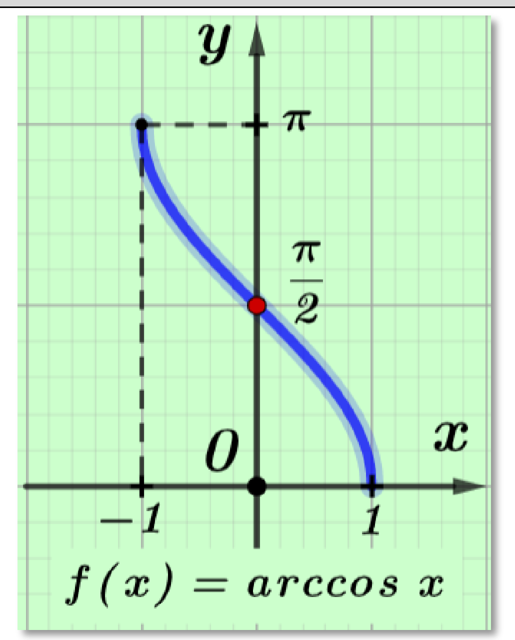
10.7 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция вида: $y = \arcsin x$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = [-1; 1]$ и $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ 2) Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) Промежутки возрастания функции: $f(x)\colon\ x \in [-1; 1] \ \Rightarrow\ (\uparrow)$	

а) Функция вида: $y = A\arcsin(Bx + C) + D$.

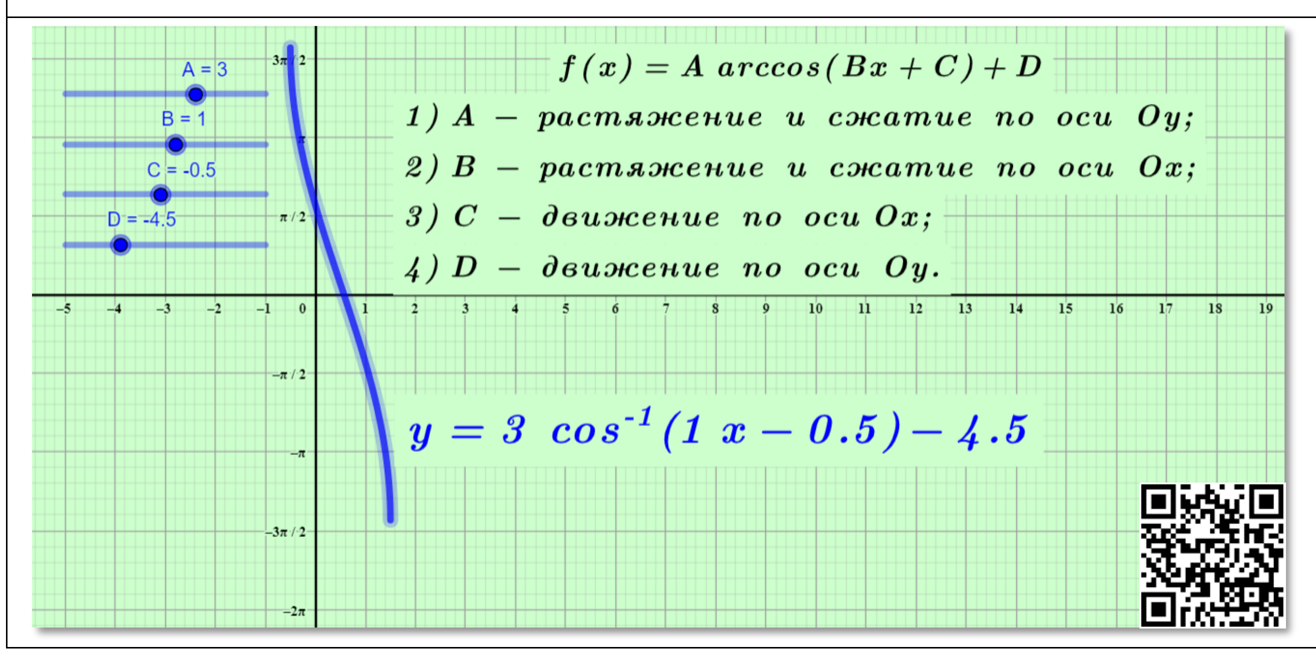
Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/tj7jsq89



Функция вида: $y = \arccos x$	**График функции:**
1) Область определения и множество значений: $D(f) = [-1; 1]$ и $E(f) = [0; \pi]$ 2) Функция ни четная, ни нечетная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ 3) Нули функции: $f(x) \cap Ox = (1; 0)$ $f(x) \cap Oy = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ 4) Промежутки убывания функции: $f(x)\colon\ x \in [-1; 1] \ \Rightarrow\ (\downarrow)$	

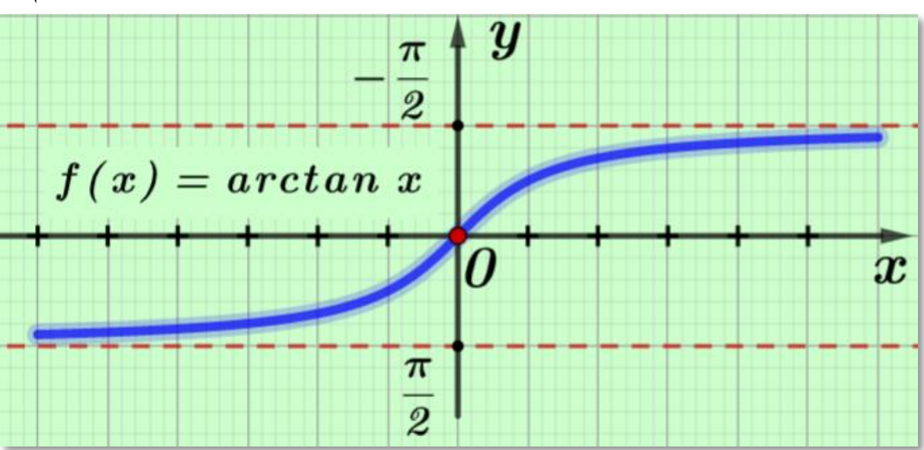
b) Функция вида: $y = A\arccos(Bx + C) + D$.

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/jmfjt5zq



Функция вида: $y = \arctan x$

График функции:



1) Область определения и множество значений:

$$D(f) = (-\infty; +\infty) \text{ и } E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

2) Функция нечетная:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

3) Нули функции:

$$f(x) \cap Ox = (0; 0)$$

4) Асимптота функции:

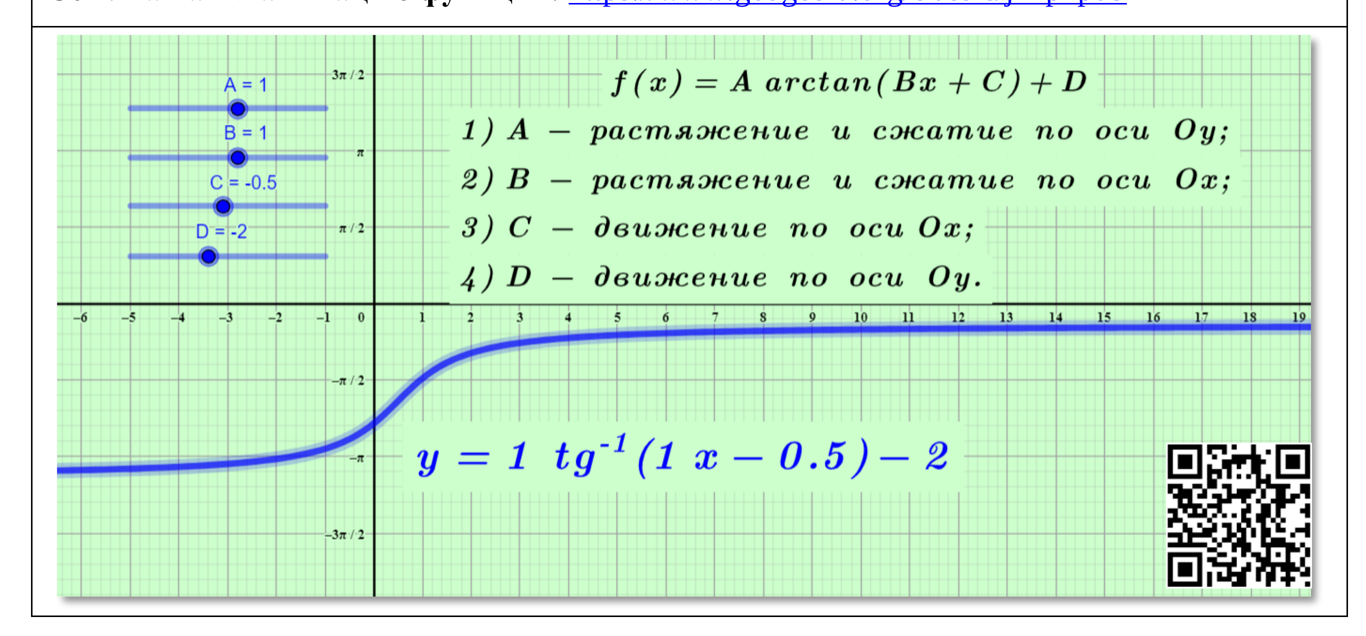
$$\text{ГА: } y_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ и } y_2 = \frac{\pi}{2}$$

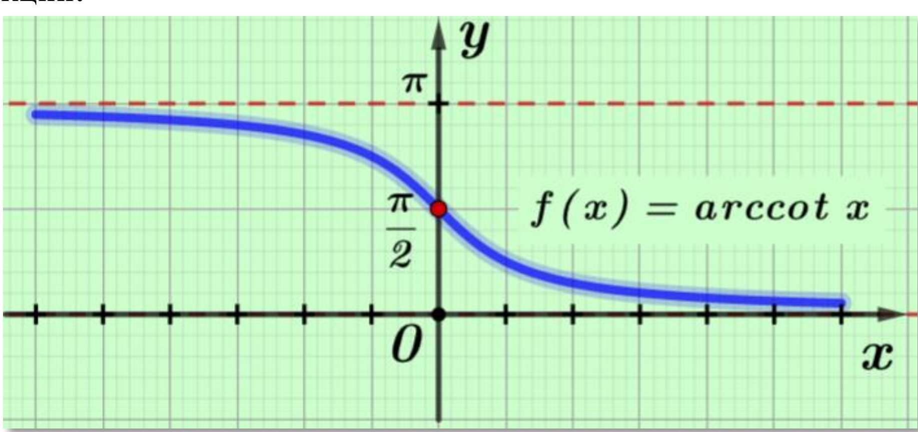
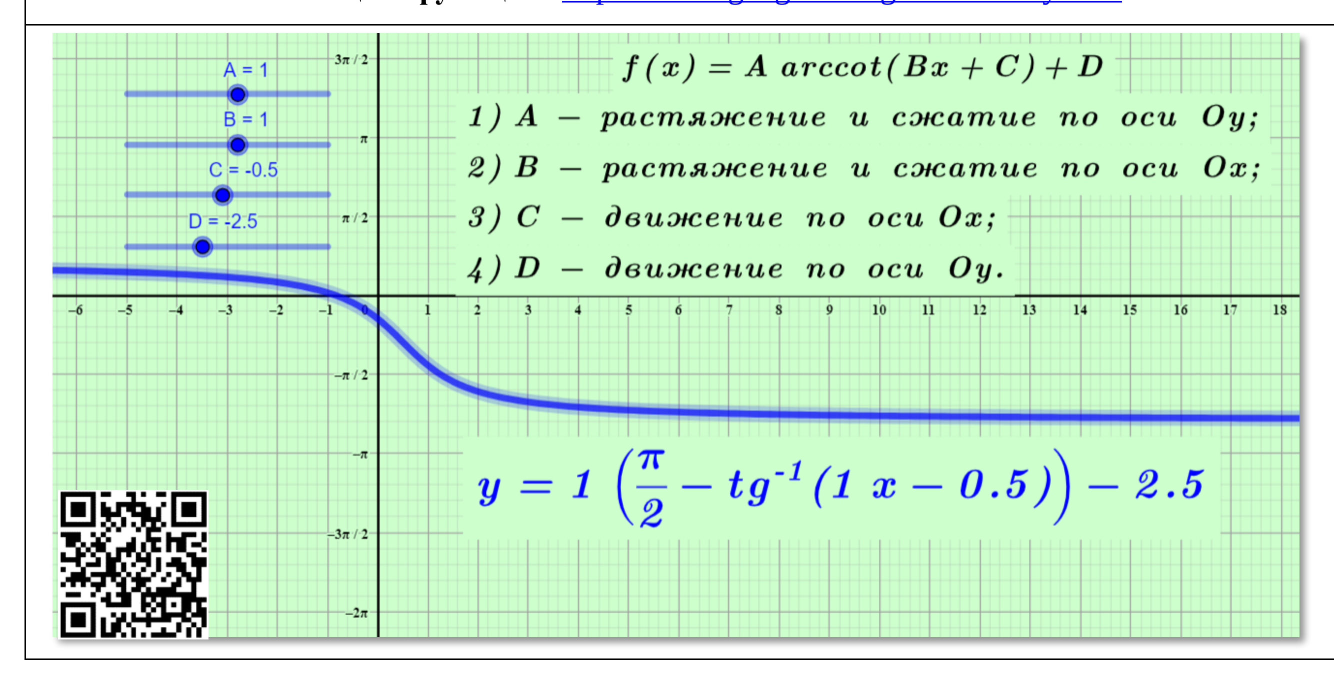
5) Промежутки возрастания функции:

$$f(x):\ x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow (\uparrow)$$

c) Функция вида: $y = A\arctan(Bx + C) + D$.

Ссылка на 2D анимацию функции: https://www.geogebra.org/classic/jxhphpd5



Функция вида: $y = \operatorname{arccot} x$
График функции: 
1) Область определения и множество значений: $$D(f) = (-\infty; +\infty) \text{ и } E(f) = (0;\ \pi)$$ 2) Функция ни четная, ни нечетная: $$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot}(x)$$ 3) Нули функции: $$f(x) \cap Oy = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$ 4) Асимптота функции: $$\text{ГА: } y_1 = 0 \text{ и } y_2 = \pi$$ 5) Промежутки убывания функции: $$f(x)\colon x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow (\downarrow)$$
d) Функция вида: $y = A\operatorname{arccot}(Bx + C) + D$. **Ссылка на 2D анимацию функции:** https://www.geogebra.org/classic/a2zyc36x


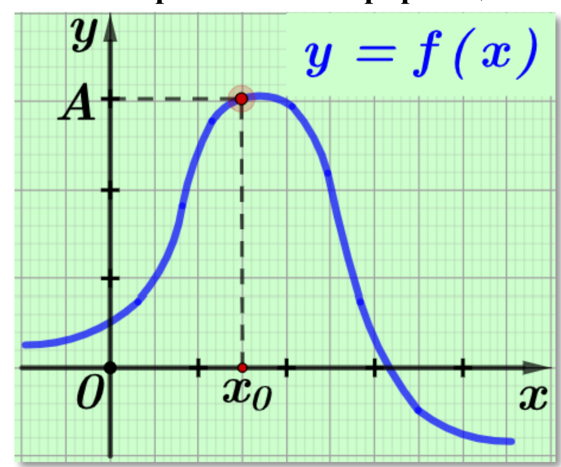
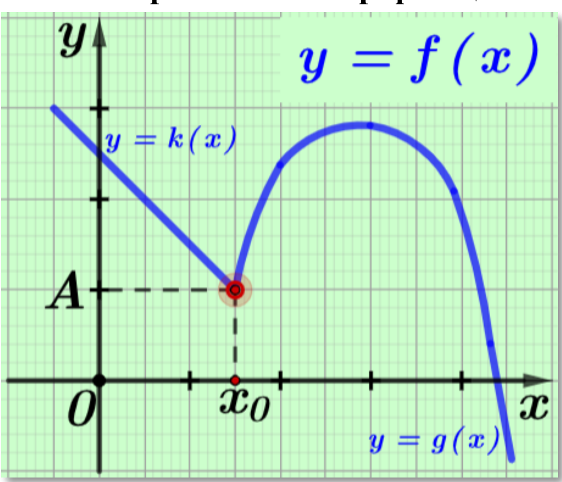
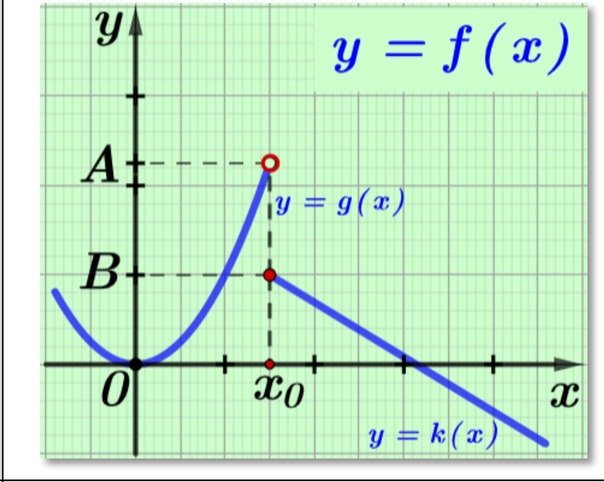
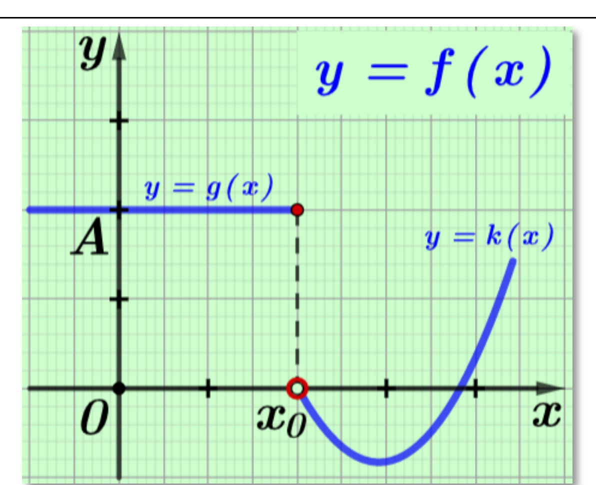
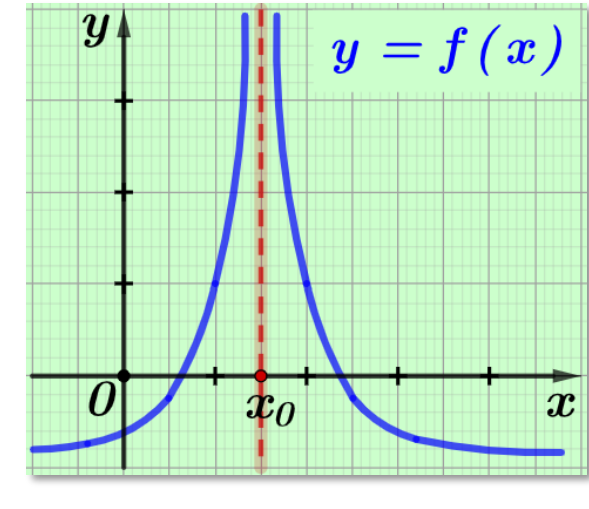
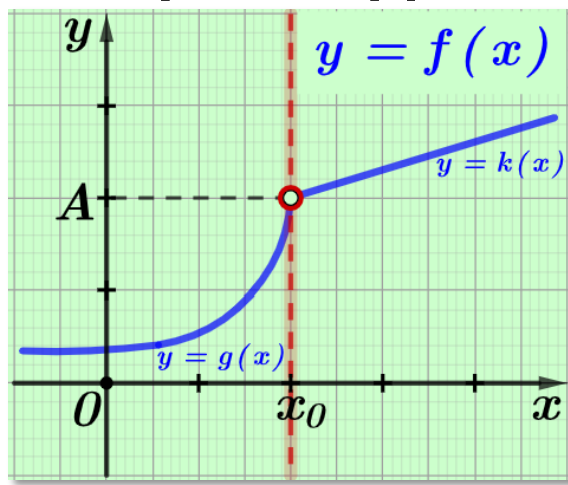
10.8 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

№	Функция и его свойства:	График функции:
1	**Функция вида:** $y = \|x\|$ 1) $D(f) = R$ и $E(f) = [0; +\infty)$ 2) $f(-x) = f(x)$ 3) $f(x) \cap Ox = (0; 0)$ 4) $f(x)$: $x \in (-\infty; 0]$ $\Rightarrow$ $(\downarrow)$ 5) $f(x)$: $x \in [0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$	$f(x) = \|x\|$
2	**Функция вида:** $y = \left\|\frac{1}{x}\right\|$ 1) $D(f)$: $x \neq 0$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) $f(-x) = f(x)$ 3) ВА: $x = 0$ и ГА: $y = 0$ 4) $f(x)$: $x \in (-\infty; 0)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$ 5) $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\downarrow)$	$f(x) = \left\|\frac{1}{x}\right\|$
3	**Функция вида:** $y = e^x$ 1) $D(f) = R$ и $E(f) = (0; +\infty)$ 2) $f(-x) \neq \pm f(x)$ 3) $f(x) \cap Oy = (0; 1)$ 4) ГА: $y = 0$ 5) $f(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$	$f(x) = e^x$
4	**Функция вида:** $y = \ln(x)$ 1) $D(f) = (0; +\infty)$ и $E(f) = R$ 2) $f(-x) \neq \pm f(x)$ 3) $f(x) \cap Ox = (1; 0)$ 4) ВА: $x = 0$ 5) $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $(\uparrow)$	$f(x) = ln(x)$

Раздел – XI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

11.1 ПРЕДЕЛЫ

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">ПРЕДЕЛЫ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Предел функции в точке:</td><td>Геометрическая интерпретация:</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, (A - \text{число})$
Число A называется $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta >$ $> 0;\ \forall x\colon |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$</td><td>$x \to x_0 \ \Rightarrow\ y \to A$
y, $A+\varepsilon$, A, $A-\varepsilon$, $y = f(x)$, x_0, 0, $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$, x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">Свойства пределов:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x) + h(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) + \lim\limits_{x\to a} h(x)$;
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} h(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$;
4) $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$;
5) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Первый замечательный предел:</td><td>Второй замечательный предел:</td></tr>
<tr><td>1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = 1$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1.$</td><td>1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{kx}\right)^{kx} = e$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td colspan="2">Функция непрерывная в точке:</td></tr>
<tr><td>$f(x)$, если $x = x_0$</td><td>$f(x) = \begin{cases} k(x), & \text{если } x < x_0 \\ g(x), & \text{если } x \geq x_0 \end{cases}$</td></tr>
</table>

	Геометрическая интерпретация: 	**Геометрическая интерпретация:** 
5	**Точка разрыва I-го рода (скачок):**	
	$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } x<x_0 \\ k(x), & \text{если } x\geq x_0 \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } x\leq x_0 \\ k(x), & \text{если } x<x_0 \end{cases}$
		
6	**Точка разрыва II-го рода:**	
	$f(x), \text{ если } x\neq x_0$	$f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } x<x_0 \\ k(x), & \text{если } x>x_0 \end{cases}$
	Геометрическая интерпретация: 	**Геометрическая интерпретация:** 

	Вертикальная асимптота: ВА: $x = x_0$	Горизонтальная асимптота: ГА: $y = y_0$	Наклонная асимптота: НА: $y = kx + b$ $(k \neq 0)$
7	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$	$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$.
	y, 0, x_0, x	y, y_0, 0, x	y, $y = kx + b$, 0, x

11.2 ПРОИЗВОДНАЯ

№	ПРОИЗВОДНАЯ	
1	**Простейшие производные:**	
	1) $(C)' = 0, (C - const)$; 2) $(Cu)' = Cu'$; 3) $(u + v + w)' = u' + v' + w'$; 4) $(uv)' = u'v + uv'$; 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; 6) $(x^{\pm n})' = \pm n x^{\pm n - 1}$; 7) $\left(x^{\pm \frac{1}{n}}\right)' = \pm \frac{1}{n} x^{\pm \frac{1}{n} - 1}$; 8) $(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$; 9) $(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e$; 10) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 11) $(a^x)' = a^x \ln a$; 12) $(e^x)' = e^x$; 13) $(\sin x)' = \cos x$;	14) $(\cos x)' = -\sin x$; 15) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 16) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 17) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 18) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 19) $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$; 20) $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$; 21) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$; 22) $(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{cosec}\, x \cdot \cot x$; 23) $(\mathrm{arcsec}\, x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$; 24) $(\mathrm{arccosec}\, x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

2	**Производные некоторых функций:** 1) $[f(g(x))]' = f'^{(g(x))} \cdot g'(x)$; 2) $(u^v)' = vu^{v-1}(u)'$; 3) $(\ln\|x\|)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}{x^n}$; 4) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; 5) $(e^x)^{(n)} = e^x$; 6) $(a^{mx})^{(n)} = a^{mx} \cdot m^n \ln^n a$; 7) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$; 8) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$; 9) $(uv)^{(n)} = (u)^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$.
3	**Дифференциал функции:** 1) $dy = y'dx \quad \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{dy}{dx}$; 2) $d(u+v+w) = du + dv + dw$; 3) $d(uvw\ldots) = (vw\ldots)du + (uw\ldots)dv + (uv\ldots)dw + \ldots$; 4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

11.3 ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

№	ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	
1	**Приращение аргумента** Δx**:** $\Delta x = x - x_0$	**Геометрическая интерпретация:**
2	**Приращение функции** Δy**:** $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	
3	**Определение производной** $f'(x)$**:** $y' = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	
4	**Угловой коэффициент касательной** k**, проходящей через точку с координатами** $(x_0; y_0)$**:** $k = \tan\alpha = f'(x_0)$	

5	**Правило Лопиталя для вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (если предел справа существует):** $$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$	
6	**Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $M(x_0;y_0)$:** $$y_K=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$	**Геометрическая интерпретация:**
7	**Уравнение нормали к $f(x)$ в точке $M(x_0;y_0)$:** $$y_N=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$	
8	**Условие перпендикулярности двух прямых УК ⊥ УН:** $$\text{УК} \perp \text{УН}:\ k=\begin{cases}k_K=f'(x_0)\\ k_N=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\end{cases}$$	

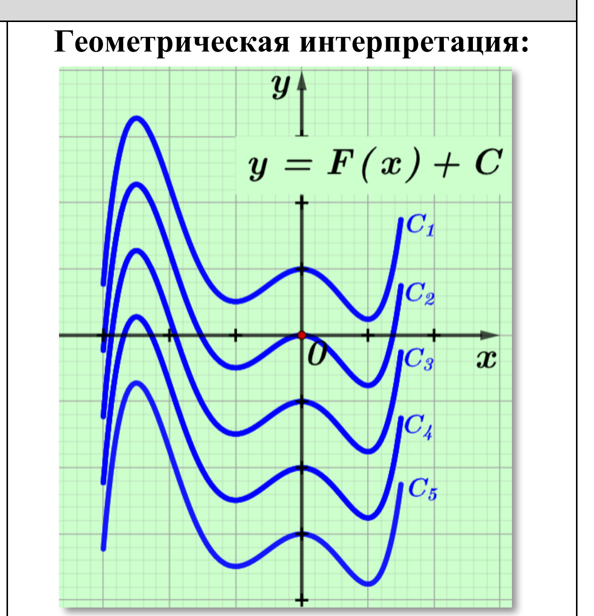
11.4 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

№	Алгоритм исследования функции	
1	Область определения и множество значения функции:	$D(f)$ – по оси Ox и $E(f)$ – по оси Oy
2	Четность и нечетность функции:	$f(-x)=f(x)$; $f(-x)=-f(x)$; $f(-x)\neq\pm f(x)$
3	Периодичность функции:	$f(x)=f(x+nT), n\in Z$, T – период
4	Точки пересечения функции с осью:	$f(x)\cap Ox=(x;0)$ и $f(x)\cap Oy=(0;y)$
5	Промежутки знакопостоянства:	$f(x)>0\ (\uparrow)$ и $f(x)<0\ (\downarrow)$
6	Асимптоты функции:	ВА: $x=x_0$; ГА: $y=y_0$; НА: $y=kx+b$
7	Точки экстремума:	$f'(x)=0 \Rightarrow \left\lvert\begin{matrix}\nearrow & x_{max} & \searrow\\ \searrow & x_{min} & \nearrow\end{matrix}\right.$
8	Выпуклость и вогнутость функции:	$f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ вогнутая $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ выпуклая
9	График функции:	$y=f(x)$

Раздел – XII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

12.1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

<table>
<tr><th>№</th><th colspan="2">НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Определение интеграла:
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
где:
$F'(x) = f(x)$,
$F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,
$C - const$.

Ссылка на 2D иллюстрацию:
https://www.geogebra.org/classic/ytu4kvb7</td><td>Геометрическая интерпретация:

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td colspan="2">Простейшие свойства:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) $\int 0dx = C;$
2) $\int dx = x + C;$
3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$
4) $\int (u \pm v \pm w \pm \ldots)dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \pm \ldots;$
5) $\int udv = uv - \int vdu.$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td colspan="2">Интегралы от рациональной функции:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) $\int x^{\pm m}dx = \frac{x^{\pm m+1}}{\pm m+1} + C;$
2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C;$
4) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C;$
5) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$</td></tr>
</table>

6) $\int \frac{xdx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \cdot (a\ln|x+a| - b\ln|x+b|) + C;$

7) $\int \frac{xdx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C;$

8) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$

9) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C;$

10) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C;$

11) $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|) + C.$

4

Интегралы от иррациональной функции:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C;$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \cdot \sqrt{ax+b} + C;$

3) $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C;$

4) $\int x^{\pm\frac{1}{n}}\,dx = \frac{x^{\pm\frac{1}{n}+1}}{\pm\frac{1}{n}+1} + C;$

5) $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \cdot (ax+b)^{\frac{3}{2}} + C;$

6) $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{b}{\sqrt{b-ac}} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right| + C, (b-ac>0);$

7) $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} -$

$- \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \cdot \ln\left|\sqrt{a(cx+d)} + \sqrt{c(ax+b)}\right| + C, (a>0);$

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C, (a>0), (a>0);$

9) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} - (a+b) \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C;$

10) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C;$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2\sqrt{a(ax^2+bx+c)} + 2ax + b\right| + C.$

5

Интегралы от тригонометрической функции:

1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

3) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx;$

4) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx;$

5) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C;$

6) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$

9) $\int \frac{dx}{\cos x\sin x} = \ln|\tan x| + C;$

10) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x} + C, (a^2 > b^2);$

11) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \arcsin\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x} + C;$

12) $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \ln\left|\frac{b\sin x-a\cos x+\sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x+b\cos x}\right| + C;$

13) $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x};$

14) $\int \tan^m x\,dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx;$

15) $\int \cot^m x\,dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx;$

16) $\int \cos^m x\sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x\sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x\sin^n x\,dx;$

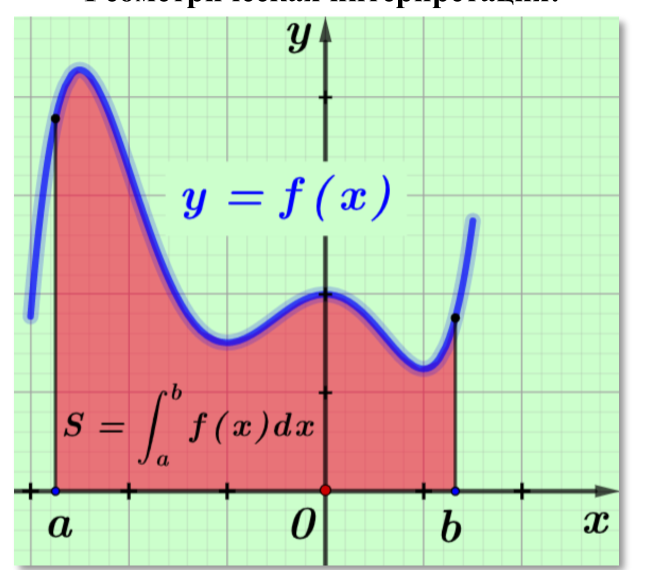
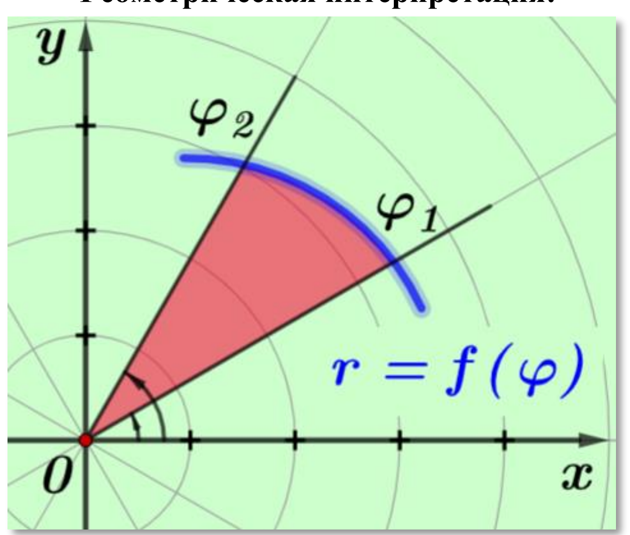
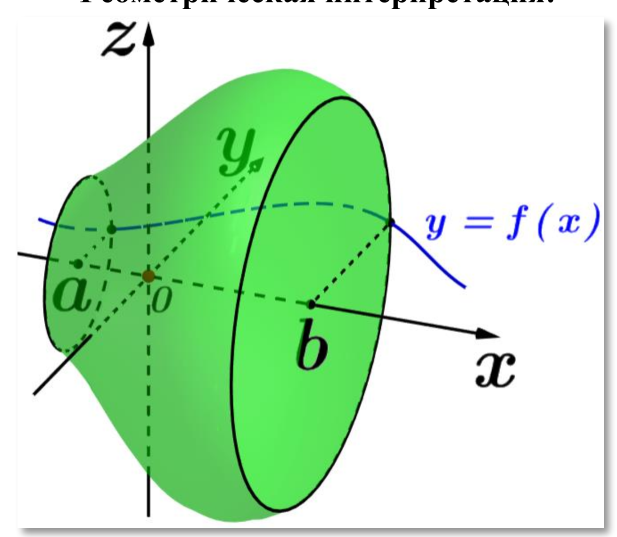
17) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} = x + C.$

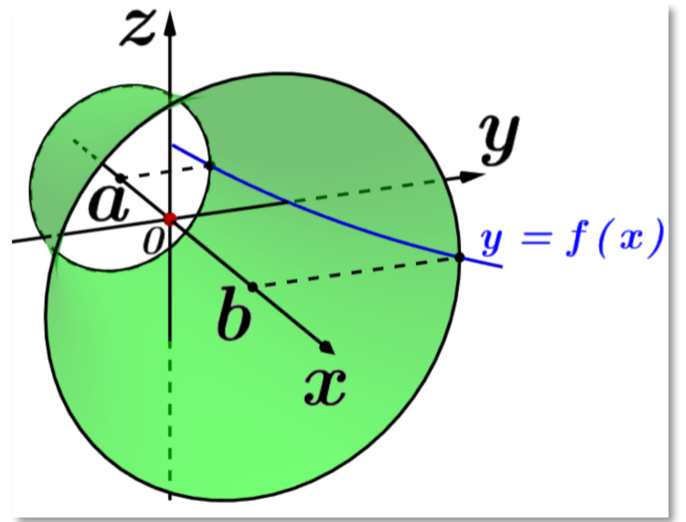
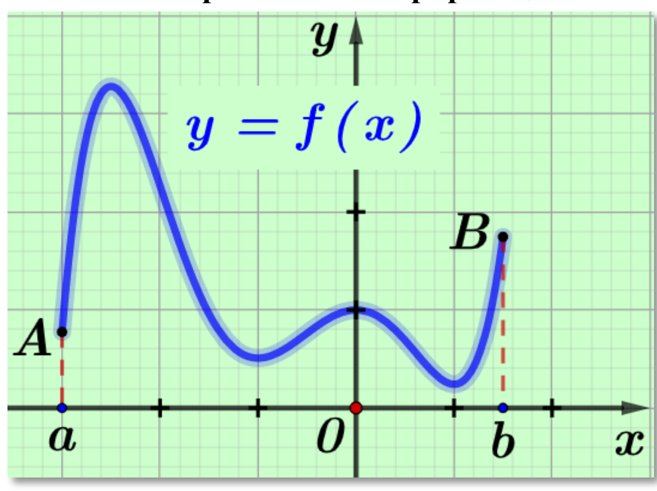
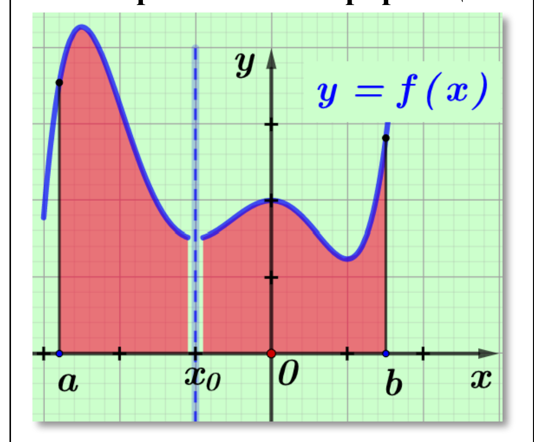
6	**Интегралы от трансцендентной функции:**
	1) $\int e^x\,dx = e^x + C;$ 2) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln\lvert x\rvert} + C;$ 3) $\int \ln\lvert x\rvert\,dx = x\ln\lvert x\rvert - x + C;$ 4) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$ 5) $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C;$ 6) $\int \frac{dx}{x\ln\lvert x\rvert} = \ln\lvert\ln\lvert x\rvert\rvert + C;$ 7) $\int x^n\ln\lvert x\rvert\,dx = x^{n+1}\cdot\left(\frac{\ln\lvert x\rvert}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C;$ 8) $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}\cdot e^{ax} + C;$ 9) $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a\cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2+b^2}\cdot e^{ax} + C;$ 10) $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}\cdot(ax-1) + C.$

12.2 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

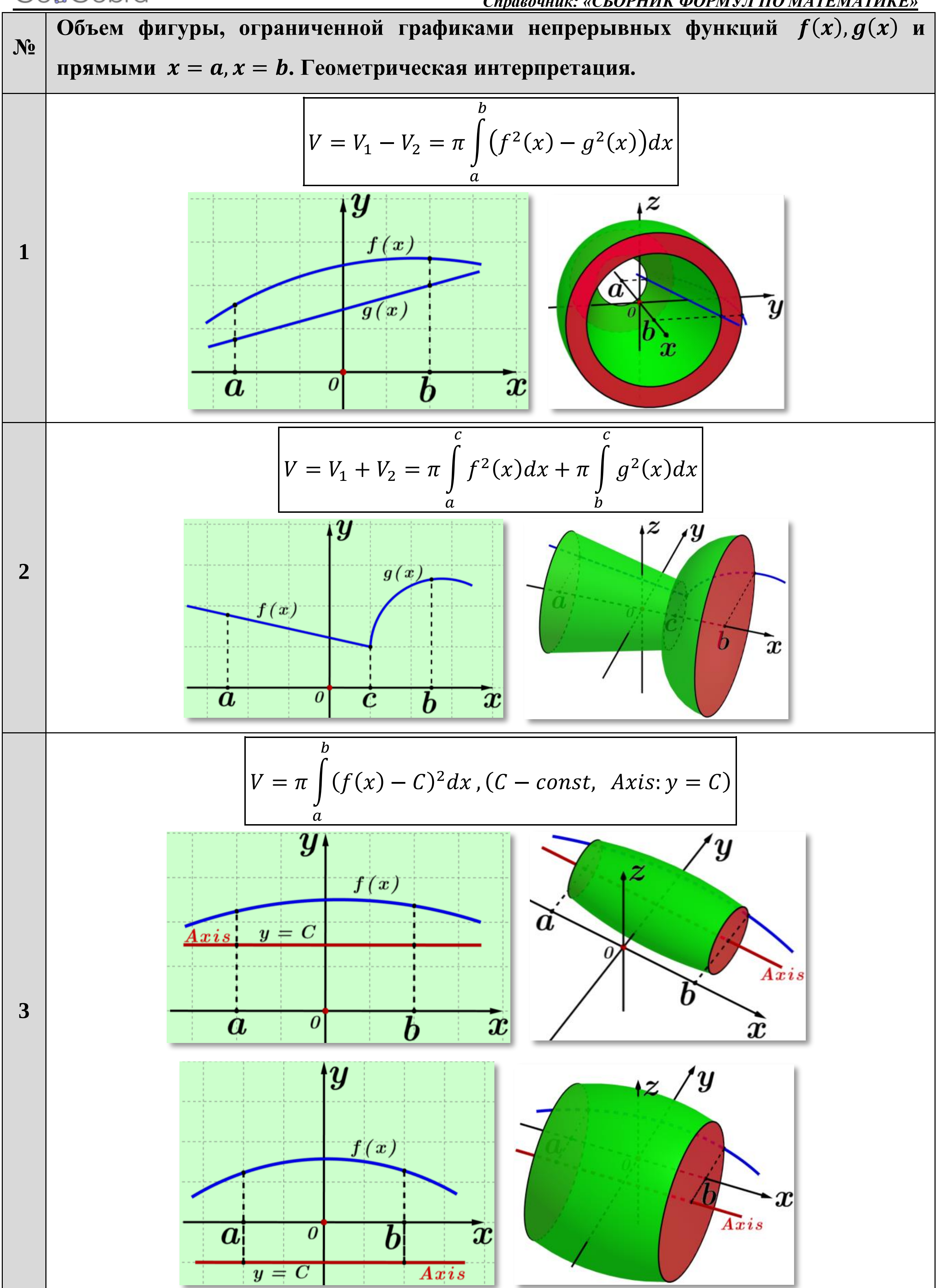
№	МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
1	**Метод замены переменной (способ подстановки):** $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \begin{vmatrix} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(u)\,du$
2	**Метод интегрирования по частям (LIATE):** $\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad\Leftrightarrow\quad \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

12.3 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

№	ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	
1	**Формула Ньютона–Лейбница:** $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$$ где: $F'(x) = f(x)$, $f(x)$ – заданная функция, $F(x)$ – произвольная первообразная, a – начальное значение, b – конечное значение.	**Геометрическая интерпретация:** 
2	**Площадь в полярных координатах:** $$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi$$ где: $r = f(\varphi)$ – заданная функция, φ_1 – начальное значение, φ_2 – конечное значение.	**Геометрическая интерпретация:** 
3	**Объем тела вращения:** $$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$ где: $f(x)$ – заданная функция, a – начальное значение, b – конечное значение.	**Геометрическая интерпретация:** 

4	**Площадь поверхности вращения:** $$\Pi = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f(x)')^2}\,dx$$ где: *Кривая дуга* – располагается выше оси Ox, Π – поверхность вращения, $f(x)$ – заданная функция, a – начальное значение, b – конечное значение.	**Геометрическая интерпретация:** 
5	**Длина дуги кривой:** $$L = \int_a^b \sqrt{1+(f(x)')^2}\,dx$$ где: $L = AB$ – кривая дуга, $f(x)$ – заданная функция, a – начальное значение, b – конечное значение.	**Геометрическая интерпретация:** 
6	**Несобственный интеграл:** $$\int_\sigma^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_\sigma^\infty f(x)\,dx$$ Пусть $f(x)$ – функция, имеющая бесконечный разрыв в точке x_0 $(a \le x_0 \le b)$. Тогда: $$\int_\sigma^\infty f(x)\,dx = \lim_{e\to 0}\int_a^{x_0-e} f(x)\,dx + \lim_{e\to 0}\int_{x_0-e}^b f(x)\,dx$$	**Геометрическая интерпретация:** 

№	Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $f(x), g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$. Геометрическая интерпретация.
1	$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
2	$S = S_1 + S_2 = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$
3	$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$



№	Объем фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $f(x), g(x)$ и прямыми $x = a, x = b$. Геометрическая интерпретация.
1	$V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$
2	$V = V_1 + V_2 = \pi \int_a^c f^2(x)dx + \pi \int_b^c g^2(x)dx$
3	$V = \pi \int_a^b (f(x) - C)^2 dx\,, (C - const,\ \ Axis: y = C)$

Раздел – XIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

13.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ I-ГО ПОРЯДКА

1

Обыкновенное дифференциальное уравнение I-го порядка:

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

где n – порядок уравнения.

2

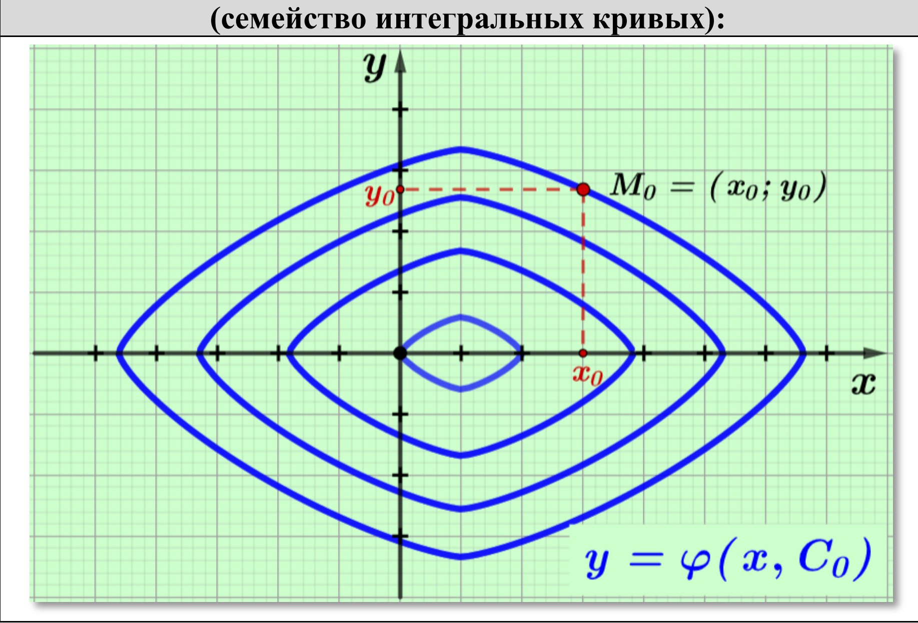
Общий вид ДУ I-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

Общее решение:

$$y = \varphi(x, C)$$

Геометрическая интерпретация (семейство интегральных кривых):



3

Уравнение с разделяющимися переменными (ДУ I-го порядка):

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Общий вид:

$$M(x)P(y)dx + Q(x)N(y)dy = 0 \quad \text{или} \quad \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C$$
$$\text{или} \quad y' = f(x)p(y)$$

4

Однородное уравнение (ДУ I-го порядка):

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

M(x, y) и N(x, y) – однородные функции одного измерения, т.е. если f(x, y) – однородная измерения m, то выполняется условие:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

Решение с помощью подстановки:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} y = tx \\ y' = t'x + t \\ t = \dfrac{y}{x} \end{array} \right.$$

где $t = t(x)$ – новая функция от переменной x.

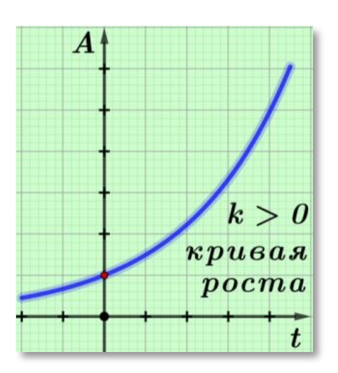
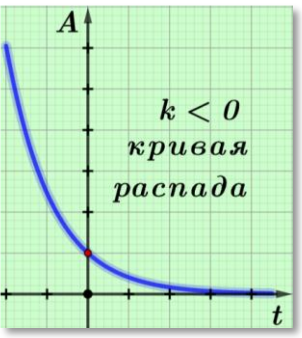
5	**Линейное (однородное) уравнение (ДУ I-го порядка):** $$y' + M(x)y = 0$$
6	**Линейное (неоднородное) уравнение с правой частью (ДУ I-го порядка):** $$y' + M(x)y \neq N(x)$$ где, при: $N(x) = 0 -$ однородное линейное, $N(x) \neq 0 -$ неоднородное линейное. **Решение с помощью подстановки (Метод И. Бернулли):** $$y = uv \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v' + M(x)v = 0 \\ u'v = N(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u' + M(x)u = 0 \\ v'u = N(x) \end{cases}$$ где u и $v -$ новые функции от переменной x.

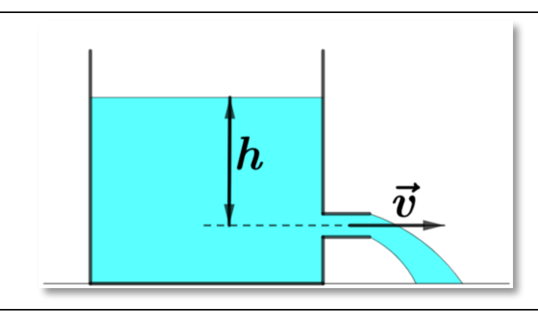
13.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ II-ГО ПОРЯДКА

1	**Линейное (однородное) ДУ II-го порядка с постоянными коэффициентами:** $$y'' + py' + qy = 0$$ **Решение через характеристическое уравнение:** $$y'' + py' + qy = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} y'' = k^2 \\ y' = k \\ y = 1 \end{matrix} \right. \quad \Rightarrow \quad k^2 + pk + q = 0$$ 1) действительные и различные $(D > 0)$, т.е. $k_1 \neq k_2$: $$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$ 2) действительные и равные $(D = 0)$, т.е. $k_1 = k_2 = k$: $$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$$ 3) комплексные $(D < 0)$, т.е. $k_{1,2} = a \pm bi$: $$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$
2	**Линейное (неоднородное) ДУ II-го порядка с постоянными коэффициентами:** $$y'' + py' + qy = f(x)$$

13.3 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1	**Линейное (однородное) ДУ II-го порядка ($\omega > 0 - const$):** $$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$ **Общее решение ДУ гармонического колебания:**

	$$y(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)\quad\Rightarrow\quad y(t)=A\cos(\omega t-\varphi)$$ где: $$T=\frac{2\pi}{\omega},\ A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\ \sin\varphi=\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\ \cos\varphi=\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}},\ \tan\varphi=\frac{C_2}{C_1}$$ **Доказательство:** $$y(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$$ $$y'(t)=-\omega C_1\sin(\omega t)+\omega C_2\cos(\omega t)$$ $$y''(t)=-\omega^2C_1\cos(\omega t)-\omega^2C_2\sin(\omega t)=-\omega^2(C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t))$$ $$y''(t)=-\omega^2y(t)\quad\rightarrow\quad y''(t)+\omega^2y(t)=0$$
2	**Экспоненциальный рост и распад:** $$A'(t)=\pm kA$$ **Доказательство:** $$\frac{dA}{dt}=\pm kA$$ $$\frac{dA}{A}=\pm kdt$$ $$\ln A=\pm kt+C\quad\rightarrow\quad A=e^{\pm kt+C}=A_0e^{\pm kt}$$ $$A(t)=A_0e^{\pm kt}$$ где: $A(t)$ – количество во время t, A_0 – первоначальное количество, t – время, $\pm k$ – константа роста ($k>0$) или распада ($k<0$).  
3	**Закон охлаждения Ньютона:** $$T'(t)=k(T-T_{\text{В}})$$ **Доказательство:** $$\frac{dT}{dt}=k(T-T_{\text{В}})$$ $$\frac{dT}{(T-T_{\text{В}})}=kdt$$ $$\ln\lvert T-T_{\text{В}}\rvert=kt+C$$ $$T-T_{\text{В}}=e^{kt+C}$$ $$T-T_{\text{В}}=e^{kt+C}\quad\rightarrow\quad T=T_{\text{В}}+e^{kt+C}=T_{\text{В}}+(T-T_{\text{В}})e^{kt}$$ $$T(t)=T_{\text{В}}+(T-T_{\text{В}})e^{kt}$$

	где: $T(t)$ – температура во время t, T – первоначальная температура, $T_В$ – температура окружающей среды, t – время, k – константа, которая определяется, используя время и температуру.
4	**Формула сложного процента:** $$A(t) = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$ где: $A(t)$ – количество во время t, A_0 – первоначальное количество, r – процентная ставка, t – время в годах, n – количество раз, когда процент возрастает в году.
5	**Скорость изменения:** Если величина z в определенный момент времени t изменяется, то ее скорость изменения определяется через производную: $$\frac{dz}{dt}$$ Зависимость функции y от аргумента t может осуществляться посредством третьей переменной x, называемой параметром: $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$
6	**Скорость вытекающей жидкости (формула Торричелли):** $$v = \sqrt{2gh}$$ 

Раздел – XIV. РЯДЫ

14.1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1	**Числовой ряд:**
	$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k$$ Ряд сходится, если существует предел: $$\lim_{n\to\infty} S_n = A, \ \text{где} \ S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k - \text{частное решение}$$
2	**Необходимое условие сходимости ряда:**
	$$\lim_{k\to\infty} U_k = 0$$
3	**Признак Даламбера:**
	$$\lim_{k\to\infty} \left\lvert \frac{U_{k+1}}{U_k} \right\rvert = q, \quad \begin{vmatrix} q > 1 - \text{расходится}, \\ q < 1 - \text{сходится}, \\ q = 1 - \text{неопределенность} \end{vmatrix}$$
4	**Интегральный признак Коши:**
	$$f(x) - \text{функция}, \ f(x) = U_k, \ (k = 1, 2, 3, \dots)$$ $$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \ \Rightarrow \ \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$
5	**Знакочередующийся ряд:**
	$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ \dots + \ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} U_k$$ Ряд сходится, если: $$\lim_{k\to\infty} U_k = 0 \ \text{ и } \ U_k > U_{k+1} \ (k = 1, k = 2, \dots)$$

14.2 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1	**Функциональный ряд:**
	$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ \dots + U_k(x) + \ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)$$ Ряд сходится при $x = a$, если сходится: $$\sum_{k=1}^{\infty} U_k(a)$$

14.3 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1	**Степенной ряд:**
	$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_kx^k, \qquad D(f) = (-R; R), R - \text{ряд сх.}$$ $$1)\ R = \lim_{k\to\infty}\left\|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right\|$$
2	**Интегрирование и дифференцирование степенных рядов:**
	$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x); \qquad \int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} U_k(x)\,dx$$
3	**Ряд Тейлора:**
	$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + $$ $$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ \ldots$$
4	**Ряд Маклорена:**
	$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ \ldots$$
5	**Биномиальный ряд:**
	$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots\ ,(\|x\| < 1,\ \ n \in Q)$$ **Биномиальное разложение:** $$(a + b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n, (n \in N)$$ где: $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

14.4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СТЕПЕННОГО РЯДА

1	Сходится при условии $(-1 < x < 1)$: $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \ldots$$
2	Сходится при условии $(-1 < x < 1)$: $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots$$
3	Сходится при условии $(-1 \le x \le 1)$: $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot4}x^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4 + \ \ldots$$

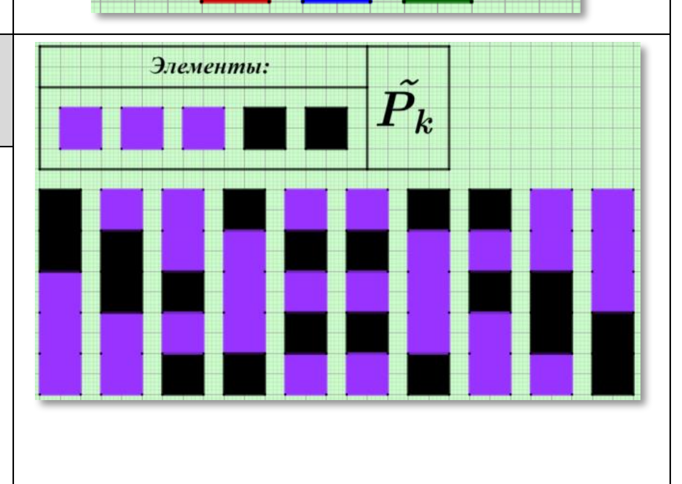
4	Сходится при условии $(-1 \le x \le 1)$: $$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + \ \dots$$

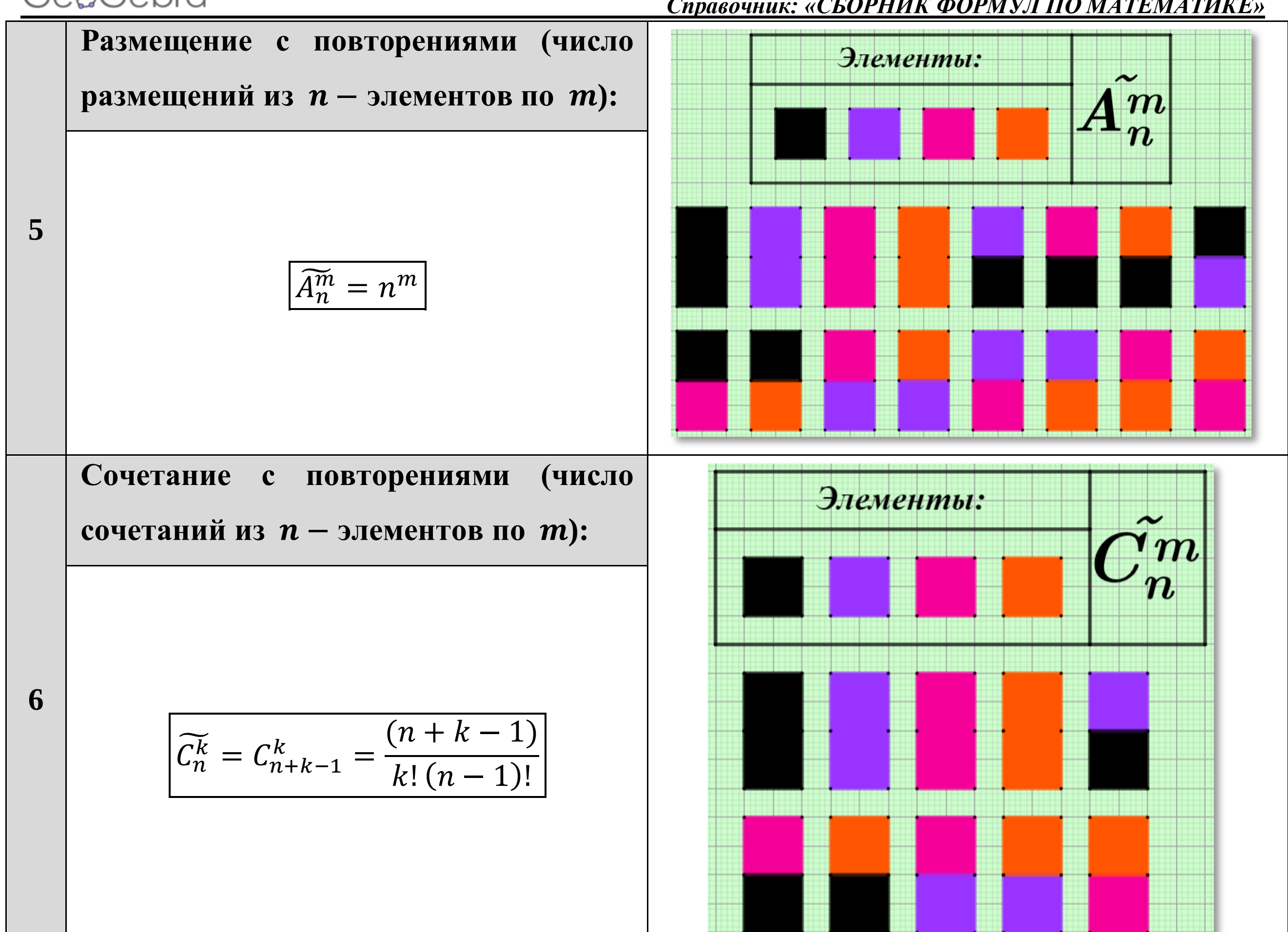
14.5 РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННОЙ РЯД ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1	Сходится при всех x: $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots$$
2	Сходится при всех x: $$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \frac{(\ln a)^4}{4!}x^4 + \ \dots$$
3	Сходится при всех x: $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots$
4	Сходится при всех x: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots$
5	Сходится при $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$: $$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ \dots$$
6	Сходится при $\lvert x\rvert < \pi$: $$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \frac{2}{4725}x^7 + \ \dots\right)$$
7	Сходится при $\lvert x\rvert < 1$: $$\ln\lvert 1 \pm x\rvert = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \ \dots$$
8	Сходится при $\lvert x\rvert < 1$: $$\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ \dots\right)$$
9	Сходится при всех положительных x: $$\ln\lvert x\rvert = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ \dots\right]$$
10	Сходится при $\lvert x\rvert \le 1$: $$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ \dots$$
11	Сходится при $\lvert x\rvert \le 1$: $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots$$

Раздел – XV. КОМБИНАТОРИКА. СТАТИСТИКА. ВЕРОЯТНОСТЬ

15.1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1	**Перестановки без повторений (число перестановок из n):** $P_n = A_n^n = n!$	
2	**Размещение без повторений (число размещений из n – элементов по m):** $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	
3	**Сочетание без повторений (число сочетаний из n – элементов по m):** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$	
4	**Перестановки с повторениями (число перестановок из k):** $\widetilde{P_k} = \dfrac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_n!}$	



5	**Размещение с повторениями (число размещений из n – элементов по m):** $\widetilde{A_n^m} = n^m$	
6	**Сочетание с повторениями (число сочетаний из n – элементов по m):** $\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)}{k!\,(n-1)!}$	

15.2 ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

1. Таблица частот:

Варианта	x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...	x_k
Абсолютная частота	n_k	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	...	n_k
Относительная частота	v_k	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	$\frac{n_4}{n}$	$\frac{n_5}{n}$	$\frac{n_6}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

2. Объем:

$$V = n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_k = \sum n_k$$

3. Медиана:

$$Me = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_k}{2} = \frac{\sum n_k}{2}$$

4. Среднее арифметическое:

$$\bar{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + x_4 n_4 + \ldots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_k} = \frac{\sum x_k n_k}{\sum n_k}$$

5	**Размах:**
	$$R = x_{max} - x_{min}$$
6	**Мода:**
	$$Mo = x_{max}$$
7	**Математическое ожидание:**
	$$M(X) = x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + x_4n_4 + \ldots + x_kn_k = \sum x_kn_k$$
	Свойства математического ожидания случайной величины: 1) $M(C) = C,\ (C - const)$ 2) $M(CX) = C \cdot M(X)$ 3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ 4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$
8	**Дисперсия:**
	$$D(X) = \sum (x_k)^2 n_k - \big(M(X)\big)^2$$
	Свойства дисперсии: 1) $D(C) = 0$, где $C - const$ 2) $D(kX) = k^2 \cdot D(X)$ 3) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, где X и $Y -$ независимы 4) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\big(X - M(X)\big)\big(Y - M(Y)\big)$, где X и $Y -$ зависимы 5) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$
9	**Стандартное отклонение:**
	$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\sum (x_k)^2 n_k - \big(M(X)\big)^2}$$

Полигон абсолютных и относительных частот

Таблица частот:									
Варианта	x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	…	x_k
Абсолютная частота	n_k	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	…	n_k
Относительная частота	v_k	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	$\frac{n_4}{n}$	$\frac{n_5}{n}$	$\frac{n_6}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$





Диаграмма «Ящик с усами»

Таблица частот:									
Варианта	x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	…	x_k
Частота	n_k	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	…	n_k

1	**Нижняя половина:**
	$x_{\text{Нач}} = \frac{0}{4}$
2	**Верхняя половина:**
	$x_{\text{Конеч}} = \frac{4}{4}$
3	**Нижний квартиль:**
	$Q_1 = \frac{1}{4} = \frac{\sum n_k}{4}$
4	**Верхний квартиль:**
	$Q_3 = \frac{3}{4} = \frac{3\sum n_k}{4}$
5	**Медиана:**
	$Q_2 = Me = \frac{2}{4} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_k}{2} = \frac{\sum n_k}{2}$
6	**Межквартильный размах:**
	$R = Q_3 - Q_1$

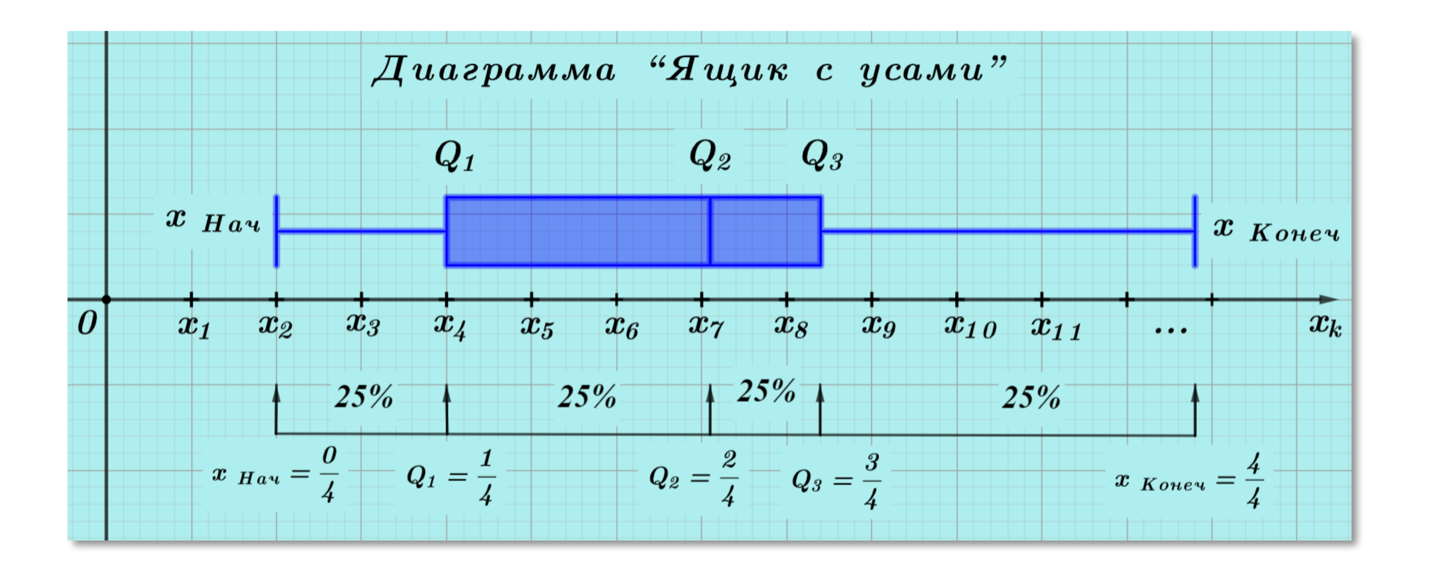
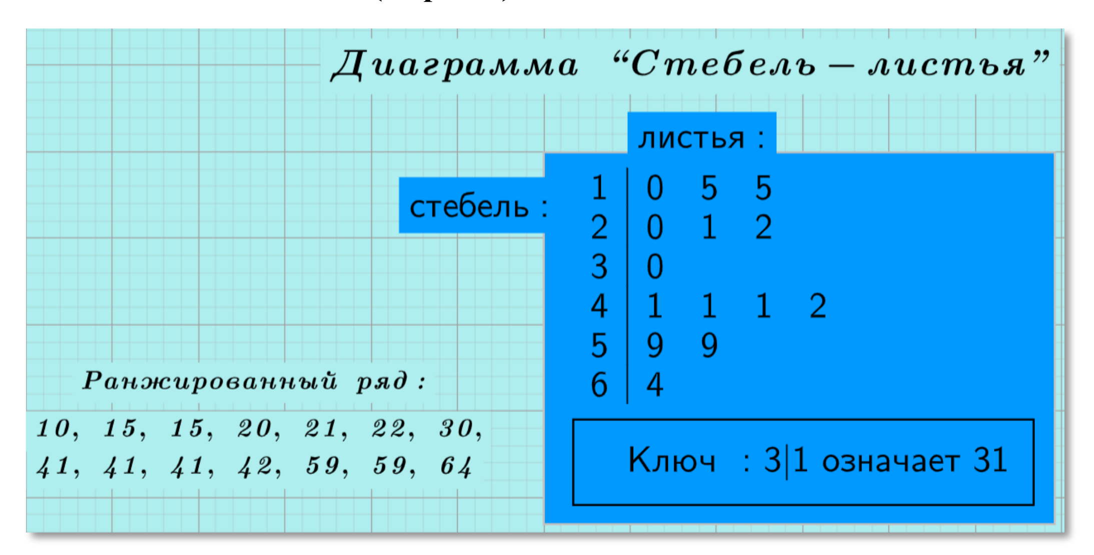


Диаграмма «Стебель – листья» (Образец)



Кумулята (Образец)

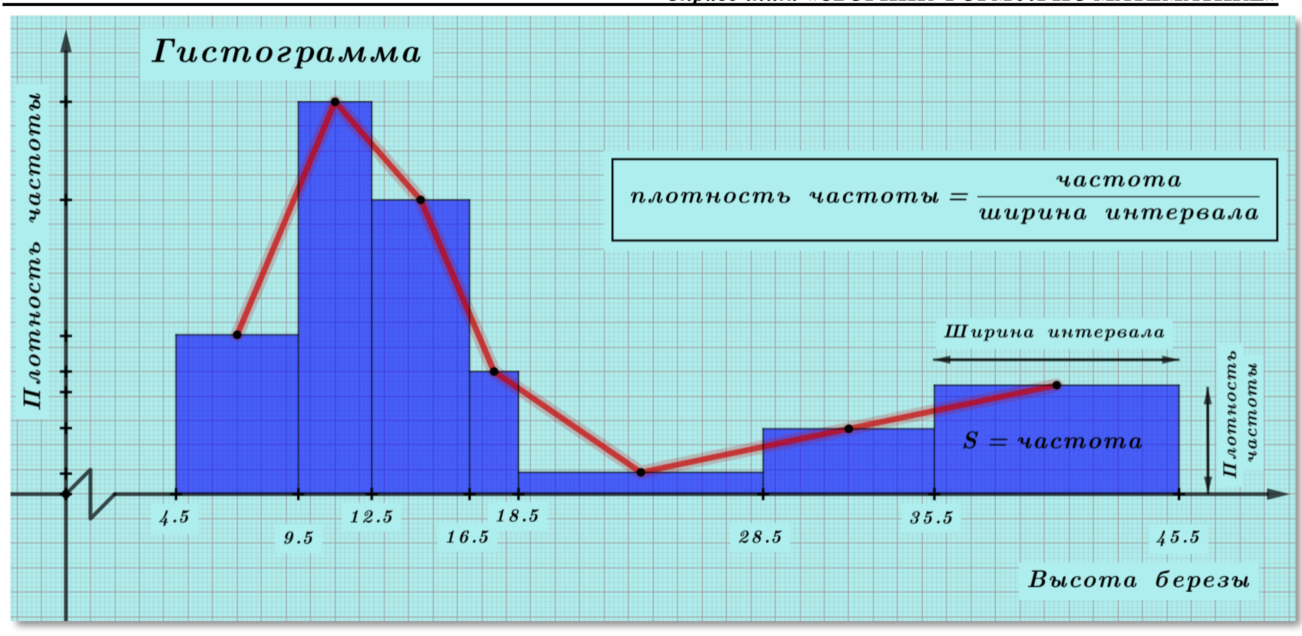
Таблица сгруппированных данных времени воспроизведения 61 документальных фильмов:			
Время воспроизведения (мин) x_k	**Границы интервалов**	**Частота n_k**	**Накопленная частота m_k**
25 – 30	$24.5 \leq x < 30.5$	3	3
31 – 36	$30.5 \leq x < 36.5$	8	11
37 – 42	$36.5 \leq x < 42.5$	10	21
43 – 48	$42.5 \leq x < 48.5$	5	26
49 – 54	$48.5 \leq x < 54.5$	23	49
55 – 60	$54.5 \leq x < 60.5$	3	52
61 – 66	$60.5 \leq x < 66.5$	9	61

1	**Нижний квартиль:**
	$Q_1 = \frac{1}{4}$, (по направлению от m_k к x_k)
2	**Верхний квартиль:**
	$Q_3 = \frac{3}{4}$, (по направлению от m_k к x_k)
3	**Медиана:**
	$Q_2 = Me = \frac{2}{4}$, (по направлению от m_k к x_k)



Гистограмма (Образец)

Таблица высоты 78 берез некоторой лесистой местности, округленная с точностью до ближайшего метра:				
Высота (метр) x_k	**Границы интервалов**	**Частота n_k**	**Ширина интервала s_k**	**Плотность частоты ρ_k**
5 – 9	$4.5 \leq x < 9.5$	13	4	3.25
10 – 12	$9.5 \leq x < 12.5$	16	2	8
13 – 15	$12.5 \leq x < 15.5$	12	2	6
16 – 18	$15.5 \leq x < 18.5$	5	2	2.5
19 – 28	$18.5 \leq x < 28.5$	4	9	$\frac{4}{9}$
29 – 35	$28.5 \leq x < 35.5$	8	6	$1\frac{1}{3}$
36 – 45	$35.5 \leq x < 45.5$	20	9	$2\frac{2}{9}$



15.3 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1	**Классическое определение вероятности:** $\boxed{P(A) = M/N}$ где: M – число случайных благоприятных событий A, N – общее число равновозможных и попарно несовместных случаев.
2	**Основное свойство вероятности:** $\boxed{0 \le P(A) \le 1, \qquad P(u) = 1}$ где: u – достоверное событие
3	**Сумма и произведение двух событий A и B:** $\boxed{A + B = A \cup B}$ (хотя бы одна из двух событий) $\boxed{AB = A \cap B}$ (совместное событие)
4	**Сложение вероятностей несовместных событий:** $\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B)}$ **Общий случай:** $\boxed{P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)}$
5	**Полная система событий:** $\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \ ... + P(A_n) = 1}$

6	**Вероятность противоположных событий:**
	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
7	**Условная вероятность:**
	$P(B/A) = \dfrac{P(A \wedge B)}{P(A)}$
8	**Общее правило умножения вероятностей:**
	$P(A \wedge B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$

15.4 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Биномиальное распределение

1	**Схема Бернулли:**
	$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где: p – вероятность «успеха» в одном испытании, $1 - p = q$ – вероятность «неуспеха» в одном испытании, n – общее число испытаний, m – число успехов в n испытаниях, $P_n(m)$ – вероятность m успехов в n испытаниях.
2	**Биномиальное распределение:**
	$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$
	$X \sim B(n, p), \;\; P(X \leq x)$ где: p – вероятность «успеха» в одном испытании, n – общее число испытаний.
3	**Наивероятнейшее число успеха:**
	$np - q \leq k \leq np + p, \qquad k \in N$
4	**Математическое ожидание:**
	$M(x) \equiv \mu = np$
5	**Дисперсия:**
	$D(x) \equiv Var(X) = \sigma^2 = npq = np(1-p)$
6	**Стандартное отклонение:**
	$\sigma \equiv \sqrt{D(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$

7

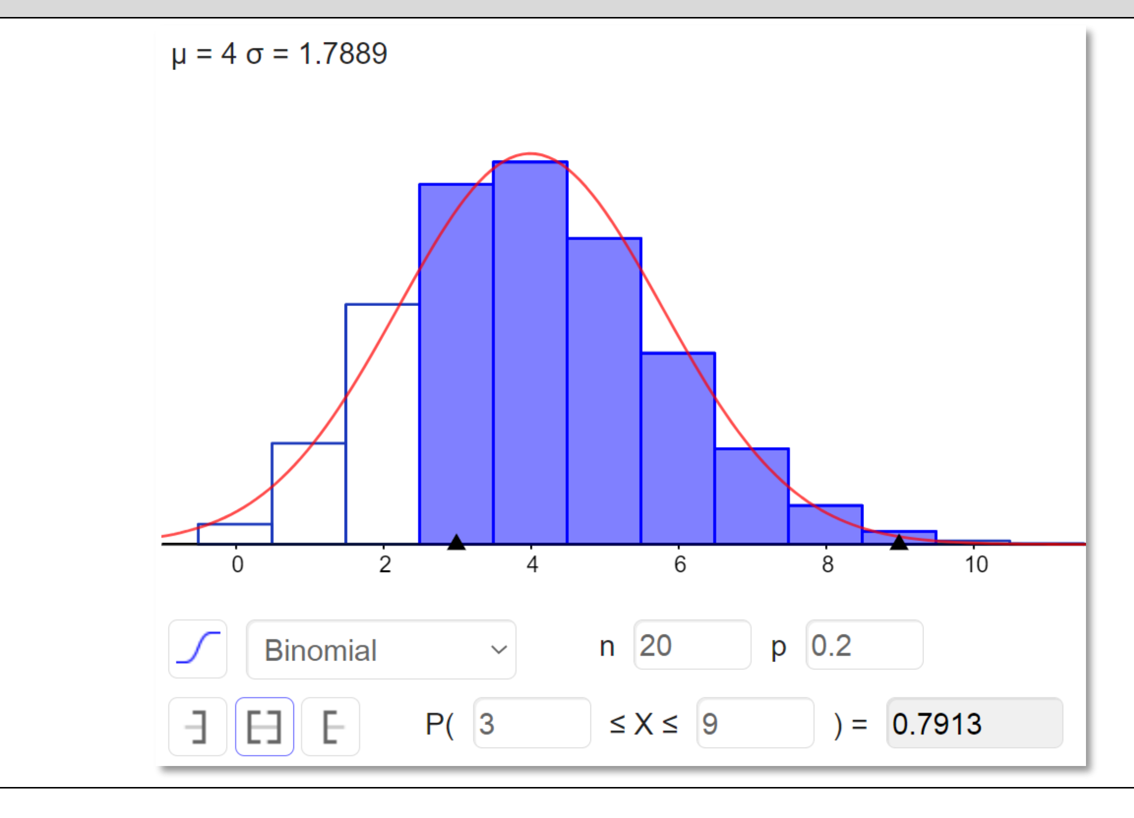
№	$\boldsymbol{X \sim B(n, p), \quad P(X \le x)}$
(i)	$P(X = x) = P(X \le x) - P(X \le x - 1)$
(ii)	$P(X \le x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = x)$
(iii)	$P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = x - 1)$
(iv)	$P(X \ge x) = 1 - P(X \le x - 1)$
(v)	$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$
(vi)	$P(x_1 < X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1)$
(vii)	$P(x_1 \le X < x_2) = P(X \le x_2 - 1) - P(X \le x_1 - 1)$

ЗАМЕЧАНИЕ!!! В таблице для формул: $\boldsymbol{5 \le n \le 30}$

№	$\boldsymbol{Y = n - x \quad \Rightarrow \quad Y \sim B(n, 1 - p)}$
(i)	$P(X \le x) = P(Y \ge n - x) = 1 - P(Y \le x - 1)$
(ii)	$P(x_1 \le X < x_2) = P(n - x_1 \ge Y > n - x_2) = P(n - x_2 < Y \le n - x_1)$

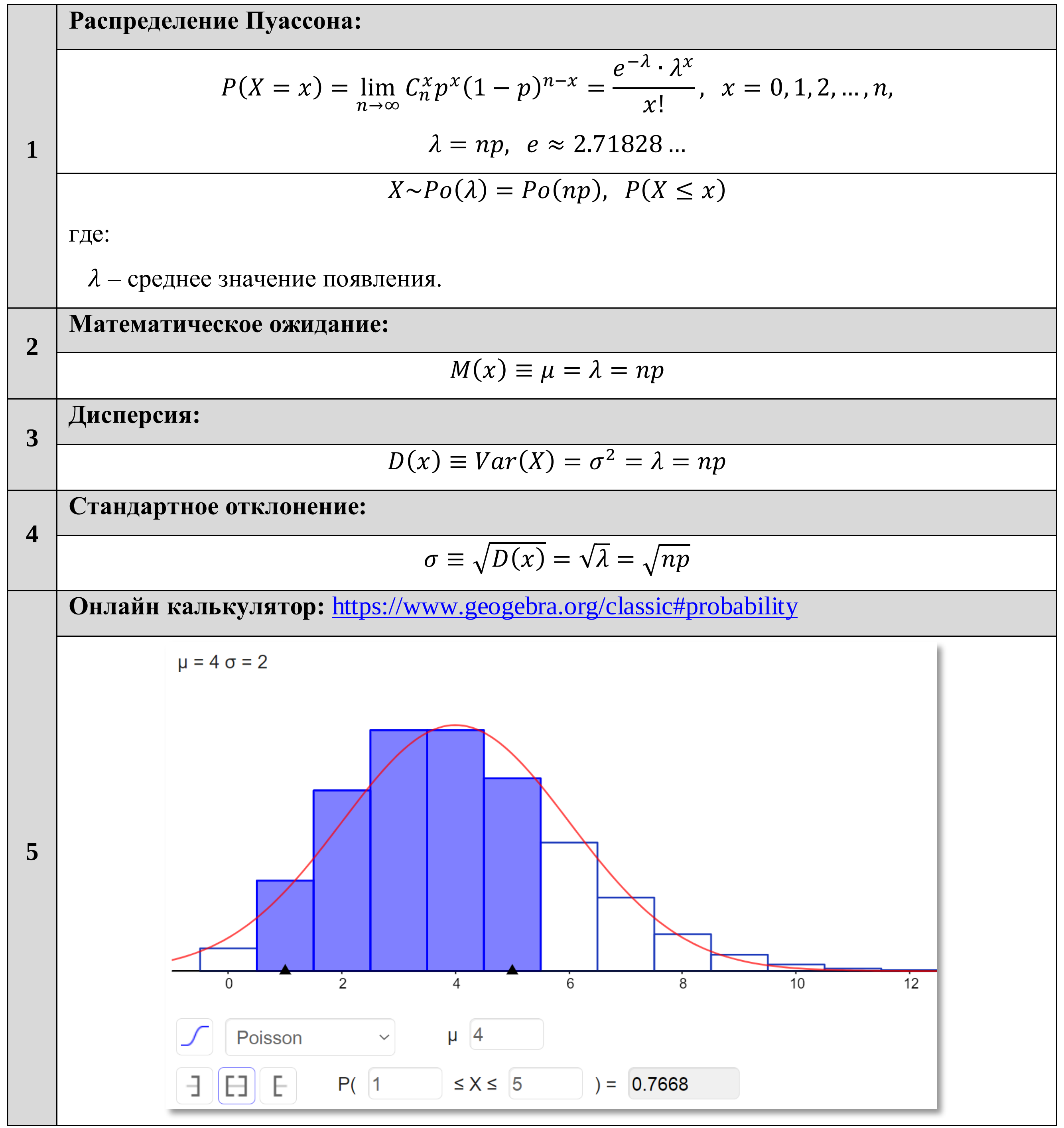
8

Онлайн калькулятор: https://www.geogebra.org/classic#probability

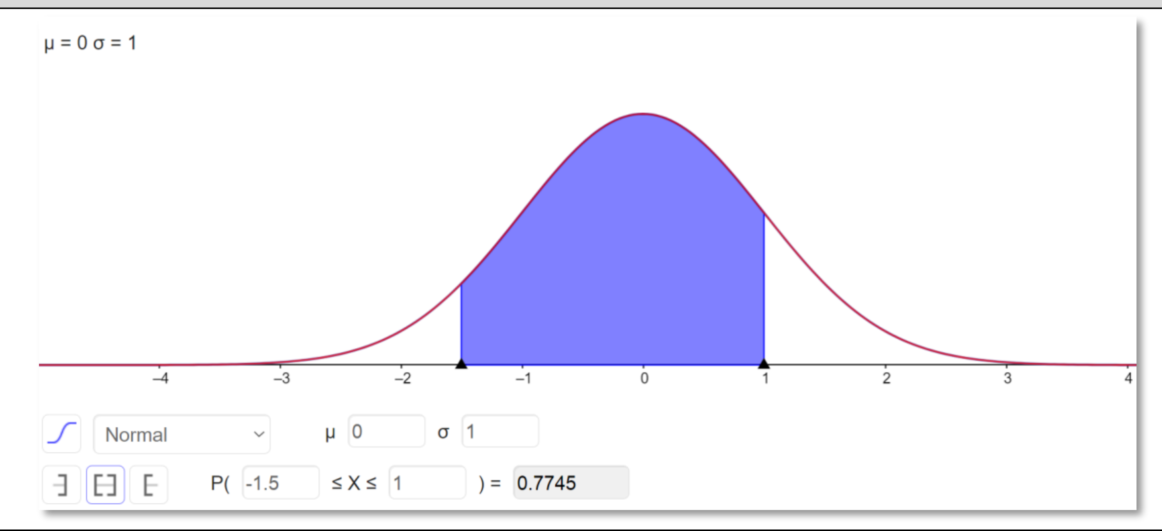
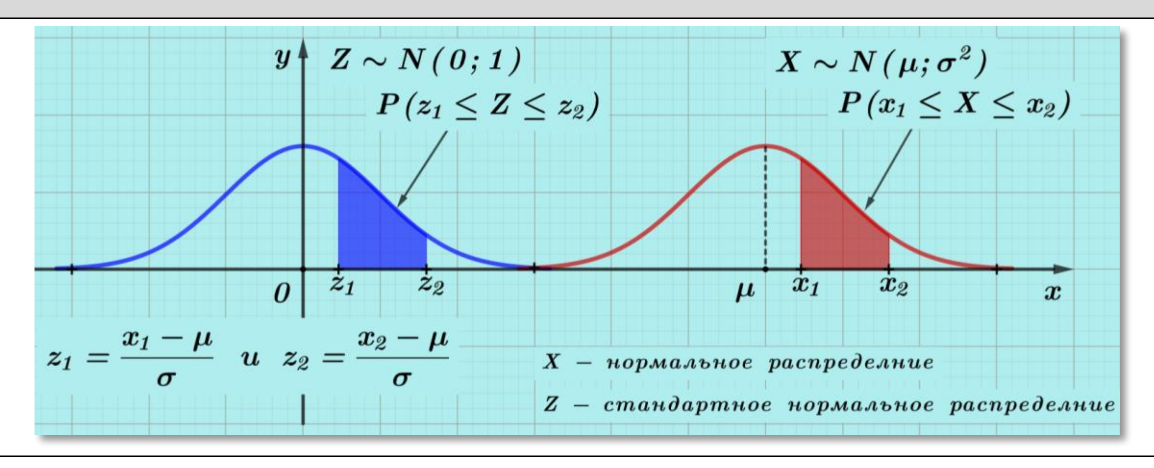


Распределение Пуассона

Название	Характеристики	Результаты
Биномиальное распределение: $\boldsymbol{X \sim B(n, p)}$	Количество «успешных» результатов из $\boldsymbol{n}$ попыток	Количество «успеха» $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{n}\}$
Распределение Пуассона: $\boldsymbol{X \sim Po(\lambda)}$	Сколько раз произойдет событие в данном промежутке времени, в задании дается среднее значение $\boldsymbol{\lambda}$ появления	Количество событий $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{n}\}$

1	**Распределение Пуассона:**
	$$P(X = x) = \lim_{n \to \infty} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n,$$ $$\lambda = np, \quad e \approx 2.71828 \dots$$
	$$X \sim Po(\lambda) = Po(np), \quad P(X \leq x)$$ где: λ – среднее значение появления.
2	**Математическое ожидание:**
	$$M(x) \equiv \mu = \lambda = np$$
3	**Дисперсия:**
	$$D(x) \equiv Var(X) = \sigma^2 = \lambda = np$$
4	**Стандартное отклонение:**
	$$\sigma \equiv \sqrt{D(x)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{np}$$
5	**Онлайн калькулятор:** https://www.geogebra.org/classic#probability
	

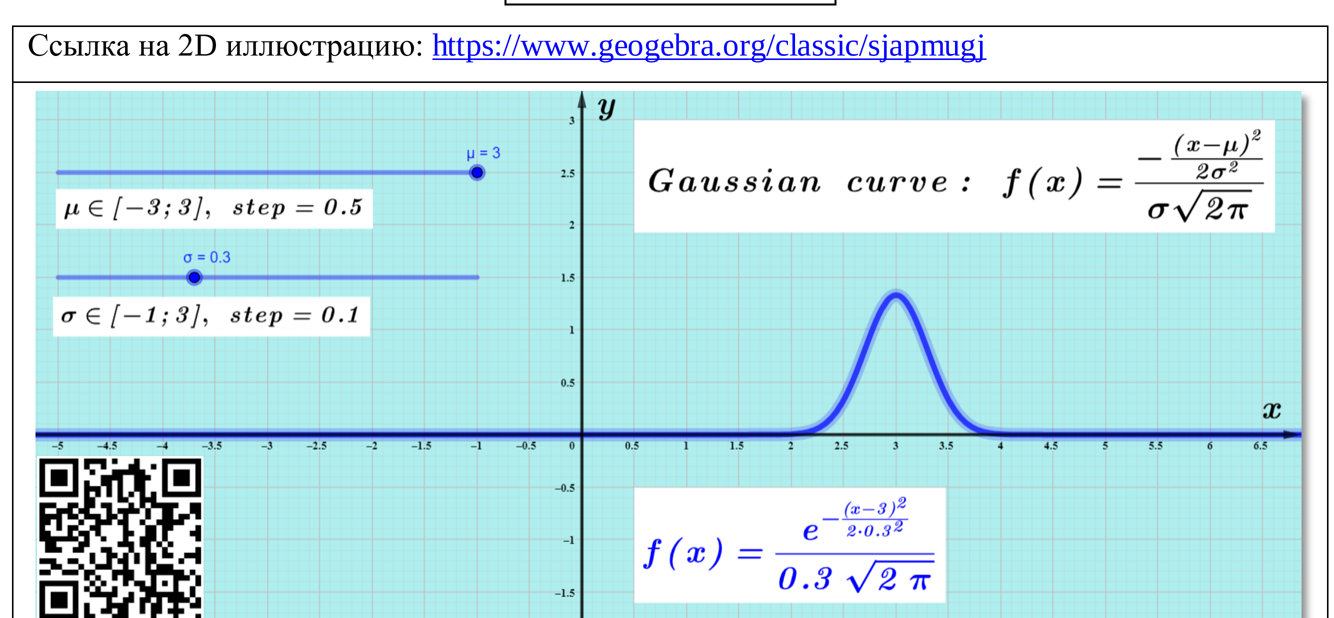
Нормальное распределение (Гаусса)

1	**Нормальное распределение:**
	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ где: μ – среднее значение (мода), σ – стандартное отклонение, σ^2 – дисперсия.
2	**Стандартное нормальное распределение:**
	$X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\; \Rightarrow \;\; Z \sim N(0{,}1)$, где $\mu = 0$, $\sigma = 1$
3	**Преобразование нормального распределения в стандартное нормальное распределение:**
	$X \sim N(\mu, \sigma^2),\;\; P(X \le x) \;\; \Rightarrow \;\; Z \sim N(0{,}1),\;\; P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z)$
4	**Онлайн калькулятор:** https://www.geogebra.org/classic#probability
	
5	**Графики плотности нормального распределения и стандартного нормального распределения:**
	

Функция Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

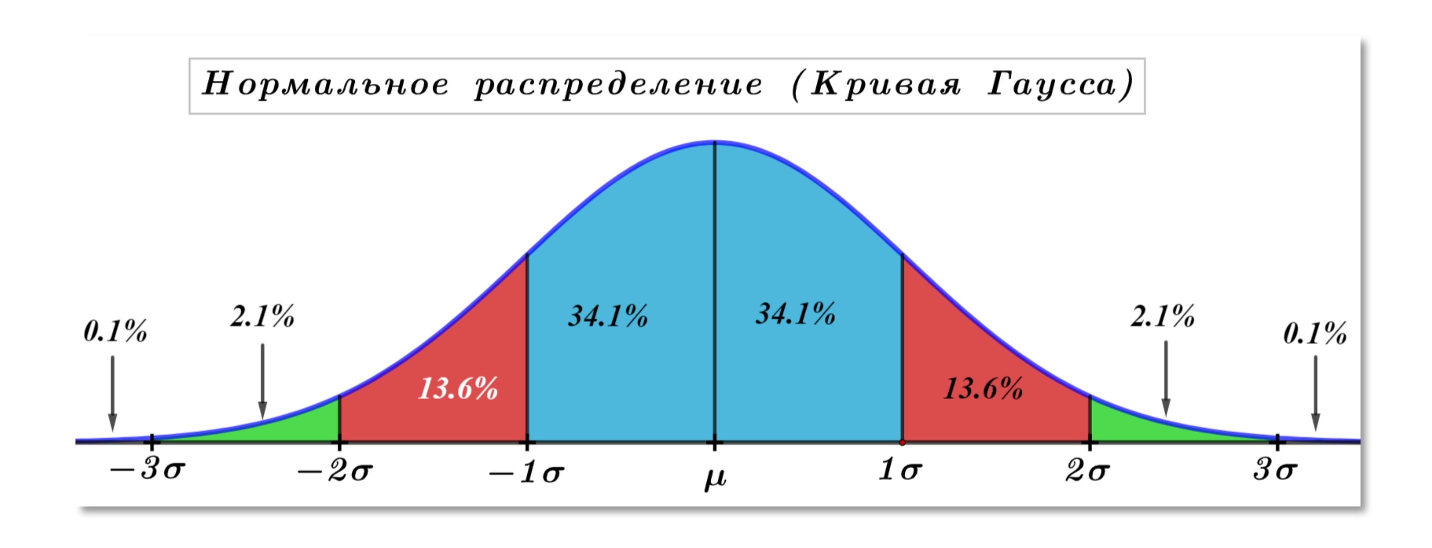
Ссылка на 2D иллюстрацию: https://www.geogebra.org/classic/sjapmugj



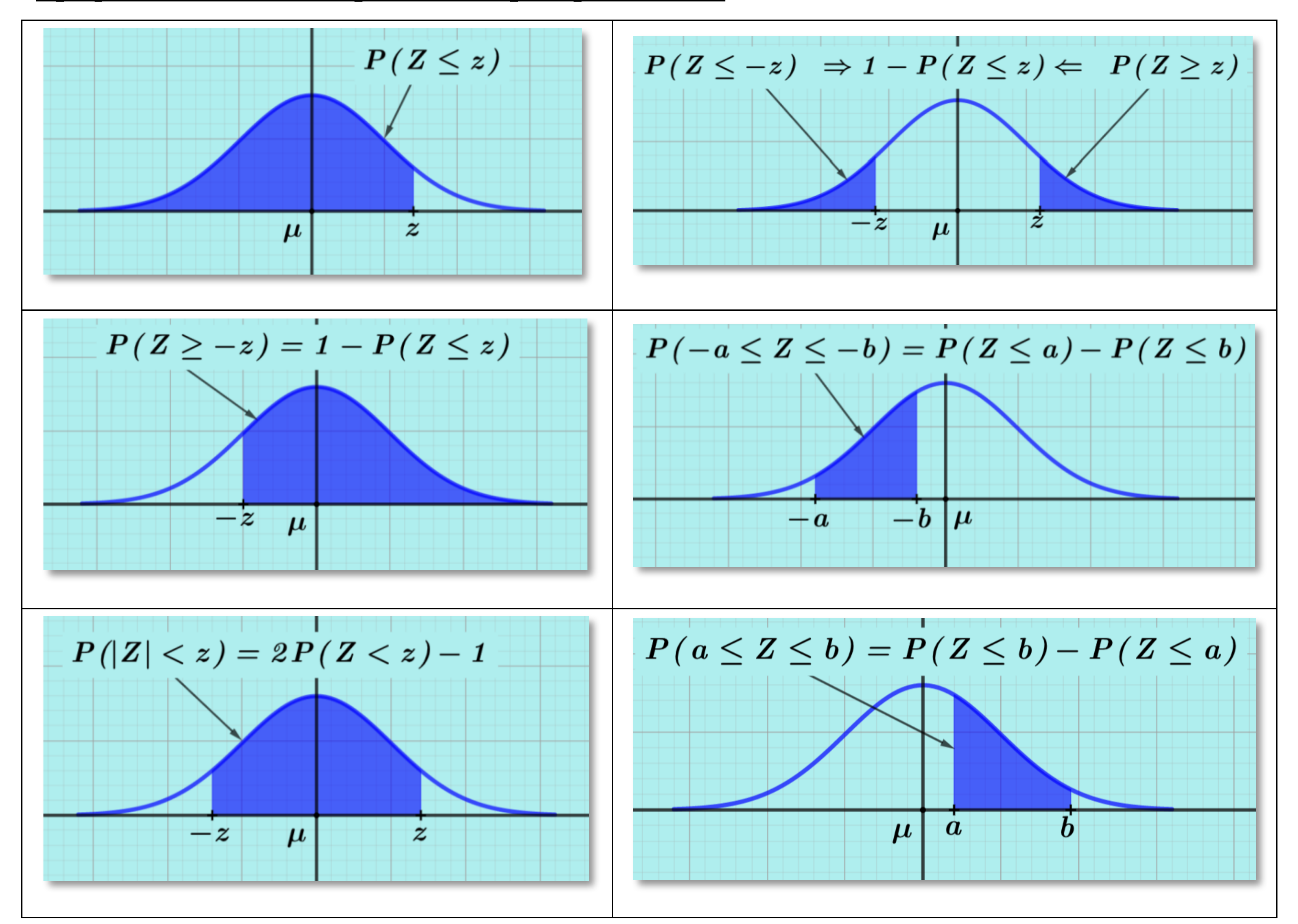
Функция стандартного нормального распределения (Кривая Гаусса):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ при } \mu = 0, \ \sigma = 1.$$

Величина площади, лежащего в основании кривой Гаусса, будет равна 1 (сумма всех вероятностей равна 100%).



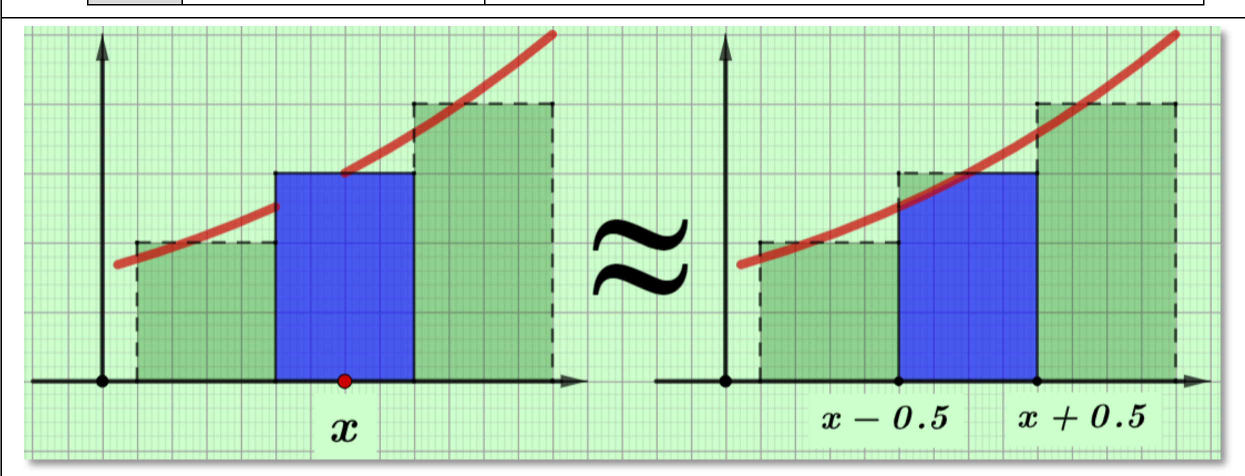
Графики плотности нормального распределения:



Приближение распределений (Аппроксимация)

1	**Приближение биномиального распределения к распределению Пуассона:**
	$B(n,p) \ \rightarrow \ Po(\lambda)$ • Если $n > 50$ и $np < 5$; • Условие проверки: $np \approx npq$.
2	**Приближение биномиального распределения к нормальному распределению:**
	$B(n,p) \ \rightarrow \ N(np, npq)$ • Если $np > 5$ и $nq = n(1-p) > 5$.
3	**Приближение распределения Пуассона к нормальному распределению:**
	$Po(\lambda) \ \rightarrow \ N(\lambda, \lambda)$ • Если $\lambda > 20$ $(\lambda = np)$; • Условие проверки: $\lambda = \mu = \sigma^2 = np$.
4	**Приближение к нормальному распределению (непрерывность):**

№	Дискретная	Непрерывная
(i)	$P(X = x)$	$P(x - 0.5 \leq X \leq x + 0.5)$
(ii)	$P(X \leq x)$	$P(X \leq x + 0.5)$
(iii)	$P(X < x)$	$P(X \leq x - 0.5)$
(iv)	$P(X > x)$	$P(X \geq x + 0.5)$
(v)	$P(x_1 \leq X \leq x_2)$	$P(x_1 - 0.5 \leq X \leq x_2 + 0.5)$
(vi)	$P(x_1 < X < x_2)$	$P(x_1 + 0.5 \leq X \leq x_2 - 0.5)$
(vii)	$P(x_1 \leq X < x_2)$	$P(x_1 - 0.5 \leq X \leq x_2 - 0.5)$
(viii)	$P(x_1 < X \leq x_2)$	$P(x_1 + 0.5 \leq X \leq x_2 + 3.5)$



15.5 ТАБЛИЦА МНОЖЕСТВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

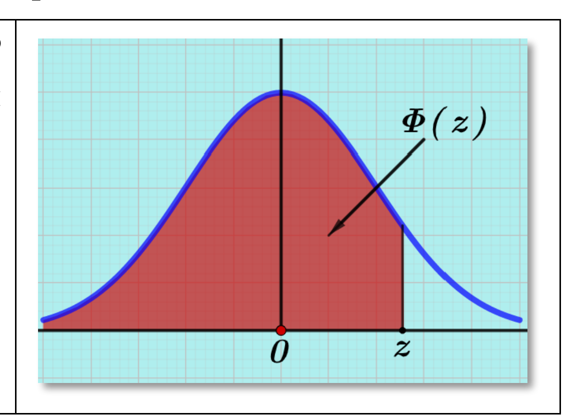
Функция нормального распределения

Если Z имеет нормальное распределение со средним значением 0 и дисперсией 1, тогда для каждого значения z в таблице даны значения $\Phi(z)$, где:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z).$$

Для отрицательных значений z используйте:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											ADD								
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	4	8	12	15	19	23	27	31	35
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	4	7	11	15	19	22	26	30	34
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	4	7	11	14	18	22	25	29	32
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	3	7	10	14	17	20	24	27	31
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	3	7	10	13	16	19	23	26	29
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	3	5	8	11	14	16	19	22	25
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	3	5	8	10	13	15	18	20	23
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	2	4	6	8	10	12	14	16	18
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	2	4	6	7	9	11	13	15	17
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	2	3	5	6	8	10	11	13	14
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	1	3	4	6	7	8	10	11	13
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	1	2	4	5	6	7	8	10	11
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	1	2	3	4	4	5	6	7	8
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	1	1	2	3	4	4	5	6	6
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	1	1	2	2	3	4	4	5	5
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	0	1	1	2	2	3	3	4	4
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	0	1	1	2	2	2	3	3	4
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	0	1	1	1	1	2	2	2	2
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	0	0	1	1	1	1	1	2	2
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	0	0	0	0	1	1	1	1	1
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Критические значения нормального распределения

Если Z имеет нормальное распределение со средним значением 0 и дисперсией 1, тогда для каждого значения p в таблице даны значения z, где: $P(Z \leq z) = p$.

p	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999	0.9995
z	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$$P(X \le x) = \sum^{x} {}^{n}C_r \,(1-p)^{n-r}\, p^r$$

$n = 5$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.7738	0.5905	0.4437	0.4019	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0041	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
1	0.9774	0.9185	0.8352	0.8038	0.7373	0.6328	0.5282	0.4609	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0453	0.0308	0.0156	0.0067	0.0033	0.0022	0.0005	0.0000
2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9645	0.9421	0.8965	0.8369	0.7901	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.2099	0.1631	0.1035	0.0579	0.0355	0.0266	0.0086	0.0012
3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9967	0.9933	0.9844	0.9692	0.9547	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.5391	0.4718	0.3672	0.2627	0.1962	0.1648	0.0815	0.0226
4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9959	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8683	0.8319	0.7627	0.6723	0.5981	0.5563	0.4095	0.2262
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 6$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.7351	0.5314	0.3771	0.3349	0.2621	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0014	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9672	0.8857	0.7765	0.7368	0.6554	0.5339	0.4202	0.3512	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0178	0.0109	0.0046	0.0016	0.0007	0.0004	0.0001	0.0000
2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9377	0.9011	0.8306	0.7443	0.6804	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.1001	0.0705	0.0376	0.0170	0.0087	0.0059	0.0013	0.0001
3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9913	0.9830	0.9624	0.9295	0.8999	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.3196	0.2557	0.1694	0.0989	0.0623	0.0473	0.0159	0.0022
4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9993	0.9984	0.9954	0.9891	0.9822	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.6488	0.5798	0.4661	0.3446	0.2632	0.2235	0.1143	0.0328
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9986	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.9122	0.8824	0.8220	0.7379	0.6651	0.6229	0.4686	0.2649
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 7$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.6983	0.4783	0.3206	0.2791	0.2097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9556	0.8503	0.7166	0.6698	0.5767	0.4449	0.3294	0.2634	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0069	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.9962	0.9743	0.9262	0.9042	0.8520	0.7564	0.6471	0.5706	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0453	0.0288	0.0129	0.0047	0.0020	0.0012	0.0002	0.0000
3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9824	0.9667	0.9294	0.8740	0.8267	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1733	0.1260	0.0706	0.0333	0.0176	0.0121	0.0027	0.0002
4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9980	0.9953	0.9871	0.9712	0.9547	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.4294	0.3529	0.2436	0.1480	0.0958	0.0738	0.0257	0.0038
5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9931	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.7366	0.6706	0.5551	0.4233	0.3302	0.2834	0.1497	0.0444
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9415	0.9176	0.8665	0.7903	0.7209	0.6794	0.5217	0.3017
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 8$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.6634	0.4305	0.2725	0.2326	0.1678	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9428	0.8131	0.6572	0.6047	0.5033	0.3671	0.2553	0.1951	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0026	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9942	0.9619	0.8948	0.8652	0.7969	0.6785	0.5518	0.4682	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0197	0.0113	0.0042	0.0012	0.0004	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9693	0.9437	0.8862	0.8059	0.7414	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0879	0.0580	0.0273	0.0104	0.0046	0.0029	0.0004	0.0000
4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9954	0.9896	0.9727	0.9420	0.9121	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.2586	0.1941	0.1138	0.0563	0.0307	0.0214	0.0050	0.0004
5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9988	0.9958	0.9887	0.9803	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.5318	0.4482	0.3215	0.2031	0.1348	0.1052	0.0381	0.0058
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9974	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.8049	0.7447	0.6329	0.4967	0.3953	0.3428	0.1869	0.0572
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9610	0.9424	0.8999	0.8322	0.7674	0.7275	0.5695	0.3366
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$n = 9$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.6302	0.3874	0.2316	0.1938	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9288	0.7748	0.5995	0.5427	0.4362	0.3003	0.1960	0.1431	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0010	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9916	0.9470	0.8591	0.8217	0.7382	0.6007	0.4628	0.3772	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0083	0.0043	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9520	0.9144	0.8343	0.7297	0.6503	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0424	0.0253	0.0100	0.0031	0.0011	0.0006	0.0001	0.0000
4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9910	0.9804	0.9511	0.9012	0.8552	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.1448	0.0988	0.0489	0.0196	0.0090	0.0056	0.0009	0.0000
5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9989	0.9969	0.9900	0.9747	0.9576	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.3497	0.2703	0.1657	0.0856	0.0480	0.0339	0.0083	0.0006
6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9957	0.9917	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.6228	0.5372	0.3993	0.2618	0.1783	0.1409	0.0530	0.0084
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8569	0.8040	0.6997	0.5638	0.4573	0.4005	0.2252	0.0712
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9740	0.9596	0.9249	0.8658	0.8062	0.7684	0.6126	0.3698
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 10$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.5987	0.3487	0.1969	0.1615	0.1074	0.0563	0.0282	0.0173	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.9139	0.7361	0.5443	0.4845	0.3758	0.2440	0.1493	0.1040	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9885	0.9298	0.8202	0.7752	0.6778	0.5256	0.3828	0.2991	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0034	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9990	0.9872	0.9500	0.9303	0.8791	0.7759	0.6496	0.5593	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0197	0.0106	0.0035	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9845	0.9672	0.9219	0.8497	0.7869	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0766	0.0473	0.0197	0.0064	0.0024	0.0014	0.0001	0.0000
5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9976	0.9936	0.9803	0.9527	0.9234	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.2131	0.1503	0.0781	0.0328	0.0155	0.0099	0.0016	0.0001
6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9965	0.9894	0.9803	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.4407	0.3504	0.2241	0.1209	0.0697	0.0500	0.0128	0.0010
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9966	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.7009	0.6172	0.4744	0.3222	0.2248	0.1798	0.0702	0.0115
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8960	0.8507	0.7560	0.6242	0.5155	0.4557	0.2639	0.0861
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9827	0.9718	0.9437	0.8926	0.8385	0.8031	0.6513	0.4013
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 12$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.5404	0.2824	0.1422	0.1122	0.0687	0.0317	0.0138	0.0077	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8816	0.6590	0.4435	0.3813	0.2749	0.1584	0.0850	0.0540	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9804	0.8891	0.7358	0.6774	0.5583	0.3907	0.2528	0.1811	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9978	0.9744	0.9078	0.8748	0.7946	0.6488	0.4925	0.3931	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0039	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9636	0.9274	0.8424	0.7237	0.6315	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0188	0.0095	0.0028	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9921	0.9806	0.9456	0.8822	0.8223	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0664	0.0386	0.0143	0.0039	0.0013	0.0007	0.0001	0.0000
6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9987	0.9961	0.9857	0.9614	0.9336	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1777	0.1178	0.0544	0.0194	0.0079	0.0046	0.0005	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9972	0.9905	0.9812	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.3685	0.2763	0.1576	0.0726	0.0364	0.0239	0.0043	0.0002
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9961	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.6069	0.5075	0.3512	0.2054	0.1252	0.0922	0.0256	0.0022
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.8189	0.7472	0.6093	0.4417	0.3226	0.2642	0.1109	0.0196
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9460	0.9150	0.8416	0.7251	0.6187	0.5565	0.3410	0.1184
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9923	0.9862	0.9683	0.9313	0.8878	0.8578	0.7176	0.4596
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

n = 14																						
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
x = 0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0779	0.0440	0.0178	0.0068	0.0034	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8470	0.5846	0.3567	0.2960	0.1979	0.1010	0.0475	0.0274	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9699	0.8416	0.6479	0.5795	0.4481	0.2811	0.1608	0.1053	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9958	0.9559	0.8535	0.8063	0.6982	0.5213	0.3552	0.2612	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9996	0.9908	0.9533	0.9310	0.8702	0.7415	0.5842	0.4755	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0040	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9809	0.9561	0.8883	0.7805	0.6898	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0174	0.0083	0.0022	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9959	0.9884	0.9617	0.9067	0.8505	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0576	0.0315	0.0103	0.0024	0.0007	0.0003	0.0000	0.0000
7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9993	0.9976	0.9897	0.9685	0.9424	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.1495	0.0933	0.0383	0.0116	0.0041	0.0022	0.0002	0.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9978	0.9917	0.9826	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.3102	0.2195	0.1117	0.0439	0.0191	0.0115	0.0015	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9960	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.5245	0.4158	0.2585	0.1298	0.0690	0.0467	0.0092	0.0004
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.7388	0.6448	0.4787	0.3018	0.1937	0.1465	0.0441	0.0042
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8947	0.8392	0.7189	0.5519	0.4205	0.3521	0.1584	0.0301
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9726	0.9525	0.8990	0.8021	0.7040	0.6433	0.4154	0.1530
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9966	0.9932	0.9822	0.9560	0.9221	0.8972	0.7712	0.5123
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

n = 16																						
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
x = 0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0541	0.0281	0.0100	0.0033	0.0015	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.8108	0.5147	0.2839	0.2272	0.1407	0.0635	0.0261	0.0137	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9571	0.7892	0.5614	0.4868	0.3518	0.1971	0.0994	0.0594	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9930	0.9316	0.7899	0.7291	0.5981	0.4050	0.2459	0.1659	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9991	0.9830	0.9209	0.8866	0.7982	0.6302	0.4499	0.3391	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0008	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9622	0.9183	0.8103	0.6598	0.5469	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0040	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9899	0.9733	0.9204	0.8247	0.7374	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0159	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9979	0.9930	0.9729	0.9256	0.8735	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0500	0.0257	0.0075	0.0015	0.0004	0.0002	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9985	0.9925	0.9743	0.9500	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.1265	0.0744	0.0271	0.0070	0.0021	0.0011	0.0001	0.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9841	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.2626	0.1753	0.0796	0.0267	0.0101	0.0056	0.0005	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9960	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.4531	0.3402	0.1897	0.0817	0.0378	0.0235	0.0033	0.0001
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9992	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.6609	0.5501	0.3698	0.2018	0.1134	0.0791	0.0170	0.0009
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.8341	0.7541	0.5950	0.4019	0.2709	0.2101	0.0684	0.0070
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9406	0.9006	0.8029	0.6482	0.5132	0.4386	0.2108	0.0429
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9863	0.9739	0.9365	0.8593	0.7728	0.7161	0.4853	0.1892
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9985	0.9967	0.9900	0.9719	0.9459	0.9257	0.8147	0.5599
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$n = 18$ p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.3972	0.1501	0.0536	0.0376	0.0180	0.0056	0.0016	0.0007	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7735	0.4503	0.2241	0.1728	0.0991	0.0395	0.0142	0.0068	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9419	0.7338	0.4797	0.4027	0.2713	0.1353	0.0600	0.0326	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9891	0.9018	0.7202	0.6479	0.5010	0.3057	0.1646	0.1017	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9985	0.9718	0.8794	0.8318	0.7164	0.5187	0.3327	0.2311	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9998	0.9936	0.9581	0.9347	0.8671	0.7175	0.5344	0.4122	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0009	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9794	0.9487	0.8610	0.7217	0.6085	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0039	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9947	0.9837	0.9431	0.8593	0.7767	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0144	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9989	0.9957	0.9807	0.9404	0.8924	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0433	0.0210	0.0054	0.0009	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9991	0.9946	0.9790	0.9567	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.1076	0.0596	0.0193	0.0043	0.0011	0.0005	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9856	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.2233	0.1407	0.0569	0.0163	0.0053	0.0027	0.0002	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9961	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.3915	0.2783	0.1390	0.0513	0.0206	0.0118	0.0012	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.5878	0.4656	0.2825	0.1329	0.0653	0.0419	0.0064	0.0002
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.7689	0.6673	0.4813	0.2836	0.1682	0.1206	0.0282	0.0015
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8983	0.8354	0.6943	0.4990	0.3521	0.2798	0.0982	0.0109
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9674	0.9400	0.8647	0.7287	0.5973	0.5203	0.2662	0.0581
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9932	0.9858	0.9605	0.9009	0.8272	0.7759	0.5497	0.2265
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9993	0.9984	0.9944	0.9820	0.9624	0.9464	0.8499	0.6028
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$n = 20$ p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.3585	0.1216	0.0388	0.0261	0.0115	0.0032	0.0008	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7358	0.3917	0.1756	0.1304	0.0692	0.0243	0.0076	0.0033	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.9245	0.6769	0.4049	0.3287	0.2061	0.0913	0.0355	0.0176	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9841	0.8670	0.6477	0.5665	0.4114	0.2252	0.1071	0.0604	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9974	0.9568	0.8298	0.7687	0.6296	0.4148	0.2375	0.1515	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8982	0.8042	0.6172	0.4164	0.2972	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9629	0.9133	0.7858	0.6080	0.4793	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0009	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9887	0.9679	0.8982	0.7723	0.6615	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0037	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9972	0.9900	0.9591	0.8867	0.8095	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0130	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9994	0.9974	0.9861	0.9520	0.9081	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0376	0.0171	0.0039	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9961	0.9829	0.9624	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0919	0.0480	0.0139	0.0026	0.0006	0.0002	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9870	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1905	0.1133	0.0409	0.0100	0.0028	0.0013	0.0001	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9963	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.3385	0.2277	0.1018	0.0321	0.0113	0.0059	0.0004	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.5207	0.3920	0.2142	0.0867	0.0371	0.0219	0.0024	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.7028	0.5836	0.3828	0.1958	0.1018	0.0673	0.0113	0.0003
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.8485	0.7625	0.5852	0.3704	0.2313	0.1702	0.0432	0.0026
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.9396	0.8929	0.7748	0.5886	0.4335	0.3523	0.1330	0.0159
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9824	0.9645	0.9087	0.7939	0.6713	0.5951	0.3231	0.0755
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9967	0.9924	0.9757	0.9308	0.8696	0.8244	0.6083	0.2642
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9997	0.9992	0.9968	0.9885	0.9739	0.9612	0.8784	0.6415
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$n = 25$																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
$x = 0$	0.2774	0.0718	0.0172	0.0105	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6424	0.2712	0.0931	0.0629	0.0274	0.0070	0.0016	0.0005	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.8729	0.5371	0.2537	0.1887	0.0982	0.0321	0.0090	0.0035	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9659	0.7636	0.4711	0.3816	0.2340	0.0962	0.0332	0.0149	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9928	0.9020	0.6821	0.5937	0.4207	0.2137	0.0905	0.0462	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9988	0.9666	0.8385	0.7720	0.6167	0.3783	0.1935	0.1120	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9998	0.9905	0.9305	0.8908	0.7800	0.5611	0.3407	0.2215	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	1.0000	0.9977	0.9745	0.9553	0.8909	0.7265	0.5118	0.3703	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216	0.0058	0.0012	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9995	0.9920	0.9843	0.9532	0.8506	0.6769	0.5376	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539	0.0174	0.0043	0.0008	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.9999	0.9979	0.9953	0.9827	0.9287	0.8106	0.6956	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148	0.0440	0.0132	0.0029	0.0016	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	1.0000	0.9995	0.9988	0.9944	0.9703	0.9022	0.8220	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122	0.0960	0.0344	0.0093	0.0056	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9985	0.9893	0.9558	0.9082	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450	0.1827	0.0778	0.0255	0.0164	0.0060	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9966	0.9825	0.9585	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000	0.3063	0.1538	0.0604	0.0415	0.0175	0.0034	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9836	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550	0.4574	0.2677	0.1254	0.0918	0.0442	0.0107	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9944	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878	0.6157	0.4142	0.2288	0.1780	0.0978	0.0297	0.0056	0.0012	0.0005	0.0000	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9984	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852	0.7576	0.5754	0.3697	0.3044	0.1894	0.0713	0.0173	0.0047	0.0021	0.0001	0.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461	0.8660	0.7265	0.5332	0.4624	0.3231	0.1494	0.0468	0.0157	0.0080	0.0005	0.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784	0.9361	0.8464	0.6939	0.6297	0.4882	0.2735	0.1091	0.0447	0.0255	0.0023	0.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927	0.9742	0.9264	0.8266	0.7785	0.6593	0.4389	0.2200	0.1092	0.0695	0.0095	0.0002
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980	0.9914	0.9706	0.9174	0.8880	0.8065	0.6217	0.3833	0.2280	0.1615	0.0334	0.0012
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9977	0.9905	0.9680	0.9538	0.9095	0.7863	0.5793	0.4063	0.3179	0.0980	0.0072
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9976	0.9903	0.9851	0.9668	0.9038	0.7660	0.6184	0.5289	0.2364	0.0341
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9965	0.9910	0.9679	0.9018	0.8113	0.7463	0.4629	0.1271
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9984	0.9930	0.9726	0.9371	0.9069	0.7288	0.3576
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9962	0.9895	0.9828	0.9282	0.7226
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

n = 30																							
p	0.05	0.1	0.15	1/6	0.2	0.25	0.3	1/3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	2/3	0.7	0.75	0.8	5/6	0.85	0.9	0.95
x = 0	0.2146	0.0424	0.0076	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.5535	0.1837	0.0480	0.0295	0.0105	0.0020	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.8122	0.4114	0.1514	0.1028	0.0442	0.0106	0.0021	0.0007	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.9392	0.6474	0.3217	0.2396	0.1227	0.0374	0.0093	0.0033	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.9844	0.8245	0.5245	0.4243	0.2552	0.0979	0.0302	0.0122	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9994	0.9742	0.8474	0.7765	0.6070	0.3481	0.1595	0.0838	0.0586	0.0172	0.0040	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.9999	0.9922	0.9302	0.8863	0.7608	0.5143	0.2814	0.1668	0.1238	0.0435	0.0121	0.0026	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	1.0000	0.9980	0.9722	0.9494	0.8713	0.6736	0.4315	0.2860	0.2247	0.0940	0.0312	0.0081	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	1.0000	0.9995	0.9903	0.9803	0.9389	0.8034	0.5888	0.4317	0.3575	0.1763	0.0694	0.0214	0.0050	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	1.0000	0.9999	0.9971	0.9933	0.9744	0.8943	0.7304	0.5848	0.5078	0.2915	0.1350	0.0494	0.0138	0.0029	0.0004	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	1.0000	1.0000	0.9992	0.9980	0.9905	0.9493	0.8407	0.7239	0.6548	0.4311	0.2327	0.1002	0.0334	0.0083	0.0014	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9969	0.9784	0.9155	0.8340	0.7802	0.5785	0.3592	0.1808	0.0714	0.0212	0.0045	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9918	0.9599	0.9102	0.8737	0.7145	0.5025	0.2923	0.1356	0.0481	0.0124	0.0072	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9831	0.9565	0.9348	0.8246	0.6448	0.4278	0.2309	0.0971	0.0301	0.0188	0.0064	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9936	0.9812	0.9699	0.9029	0.7691	0.5722	0.3552	0.1754	0.0652	0.0435	0.0169	0.0027	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9979	0.9928	0.9876	0.9519	0.8644	0.7077	0.4975	0.2855	0.1263	0.0898	0.0401	0.0082	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9955	0.9788	0.9286	0.8192	0.6408	0.4215	0.2198	0.1660	0.0845	0.0216	0.0031	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9986	0.9917	0.9666	0.8998	0.7673	0.5689	0.3452	0.2761	0.1593	0.0507	0.0095	0.0020	0.0008	0.0000	0.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9971	0.9862	0.9506	0.8650	0.7085	0.4922	0.4152	0.2696	0.1057	0.0256	0.0067	0.0029	0.0001	0.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9950	0.9786	0.9306	0.8237	0.6425	0.5683	0.4112	0.1966	0.0611	0.0197	0.0097	0.0005	0.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9919	0.9688	0.9060	0.7753	0.7140	0.5685	0.3264	0.1287	0.0506	0.0278	0.0020	0.0000
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9974	0.9879	0.9565	0.8762	0.8332	0.7186	0.4857	0.2392	0.1137	0.0698	0.0078	0.0001
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9960	0.9828	0.9414	0.9162	0.8405	0.6519	0.3930	0.2235	0.1526	0.0258	0.0006
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9943	0.9767	0.9645	0.9234	0.7974	0.5725	0.3836	0.2894	0.0732	0.0033
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9878	0.9698	0.9021	0.7448	0.5757	0.4755	0.1755	0.0156
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9967	0.9907	0.9626	0.8773	0.7604	0.6783	0.3526	0.0608
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9993	0.9979	0.9894	0.9558	0.8972	0.8486	0.5886	0.1878
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9980	0.9895	0.9705	0.9520	0.8163	0.4465
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9924	0.9576	0.7854
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

λ		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$x = 0$		0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
1		1.0000	0.9998	0.9996	0.9992	0.9988	0.9983	0.9977	0.9970	0.9962
2		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999
3		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
$x = 0$		0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1		0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2		0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3		1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90
$x = 0$	0.3679	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496
1	0.7358	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337
2	0.9197	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037
3	0.9810	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747
4	0.9963	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559
5	0.9994	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868
6	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966
7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90
$x = 0$	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550
1	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146
2	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460
3	0.8571	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696
4	0.9473	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318
5	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258
6	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713
7	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901
8	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969
9	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

λ	4.00	4.10	4.20	4.30	4.40	4.50	4.60	4.70	4.80	4.90
x = 0	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074
1	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439
2	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333
3	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3594	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793
4	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582
5	0.7851	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6684	0.6510	0.6335
6	0.8893	0.8786	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767
7	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9049	0.8960	0.8867	0.8769
8	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382
9	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717
10	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880
11	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953
12	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983
13	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00	9.50
x = 0	0.0067	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0404	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.1247	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2650	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.4405	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.6160	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.7622	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8666	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.9319	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9682	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9863	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9945	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9980	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9993	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9998	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

НАКОПЛЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

λ	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00
$x = 0$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867	0.2148
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472
21	0.9993	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255
22	0.9997	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931
23	0.9999	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490
24	1.0000	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317	0.8933
25	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269
26	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514
27	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687
28	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

GeoGebra – это кроссплатформенная динамическая математическая программа для элементарной и высшей математики, включающая в себя: алгебру, геометрию, статистику, арифметику, таблицы и графы (программа написана на языке Java, Маркусом Хохенвартером).

Математическая программа GeoGebra делает процесс обучения более интересным, способствуя быстрому визуальному восприятию и самообучаемости учащихся при самостоятельном геометрическом построении (планиметрия и стереометрия), создании анимации, вычислении интегралов, производных и т.д., за счет команд встроенного языка. Программу можно применять на уроках математики в режиме online, достаточно войти на адрес сайта: www.geogebra.org/classic.

Также можно установить данную программу GeoGebra на сотовый телефон или планшет через Play Market бесплатно:













Дополнительные электронные ресурсы	
Ссылка к руководству по работе с программой GeoGebra – https://wiki.geogebra.org/ru/%D0%A0%D1%83%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE	

GeoGebra

Справочник:
«СБОРНИК ФОРМУЛ ПО МАТЕМАТИКЕ»


ISBN 978-601-08-1300-7
9 786010 813007